

## Parte II Teoría de grafos

Una de las partes de la matemática discreta que en estos últimos años ha experimentado un desarrollo más notable es la *teoría de grafos*. Enmarcada dentro de la combinatoria, esta teoría permite modelar de forma simple cualquier sistema en el cual exista una relación binaria entre ciertos objetos; y es por esto que su ámbito de aplicación es muy general y cubre áreas que van desde la misma matemática—topología, probabilidad, análisis numérico, etc.—hasta las ingenierías eléctrica, de telecomunicación e informática, la investigación operativa, la sociología o, incluso, la lingüística.

En los capítulos siguientes se presentan los temas más importantes de la teoría de grafos: grafos y digrafos; planaridad; árboles y árboles generadores; grafos eulerianos y hamiltonianos; ciclos y cociclos fundamentales; flujos en redes de transporte; conectividad y apareamientos.

## Capítulo 5

# Grafos y digrafos

1. Definiciones básicas
2. Caminos, conectividad y distancia
3. Operaciones entre grafos
4. Digrafos
5. Representación matricial
6. Grafos y redes de interconexión
7. Planaridad: la fórmula de Euler
8. Caracterización de los grafos planares

En este capítulo se estudian los conceptos más básicos de la teoría de grafos y se introduce la relación de la teoría con una de sus aplicaciones importantes: el diseño de redes de interconexión. La última parte del capítulo estudia los grafos planares. Una de las aplicaciones interesantes del tema es el diseño de circuitos integrados e impresos.

### 5.1 Definiciones básicas

Un *grafo*  $G = (V, E)$  es una estructura combinatoria constituida por un conjunto  $V = V(G)$  de elementos llamados *vértices* y un conjunto  $E = E(G)$  de pares no ordenados de vértices distintos llamados *aristas*. Si la arista  $e = \{u, v\} = uv$  relaciona los vértices  $u$  y  $v$ , se dice que  $u$  y  $v$  son vértices *adyacentes* y también que el vértice  $u$  (o  $v$ ) y la arista  $e$  son *incidentes*. De otro modo, los vértices se llaman *independientes*. Las aristas  $e = uv$  y  $f = wz$  son *aristas independientes* si no tienen vértices en común, es decir,  $\{u, v\} \cap \{w, z\} = \emptyset$ . El número de vértices de  $G$ ,  $|V(G)|$ , es el *orden* del grafo y el número de aristas  $|E(G)|$  es su *tamaño*. A menudo resulta útil representar un grafo mediante un dibujo donde los vértices son puntos y

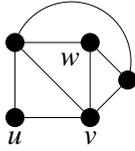


Figura 5.1: Grafo con orden 5 y tamaño 8

las aristas líneas que unen los vértices adyacentes. Así, por ejemplo, en el grafo representado en la figura 5.1, de orden 5 y tamaño 8, los vértices  $u$  y  $v$  son adyacentes, mientras que  $u$  y  $w$  son vértices independientes. A veces conviene ampliar esta definición de grafo para permitir la existencia de *lazos*, es decir, aristas que unen un vértice con él mismo, y *aristas paralelas* que unen un mismo par de vértices. En este texto, un grafo con lazos y/o con aristas paralelas se llamará *multigrafo*. En la figura 5.2 se muestra un multigrafo con un lazo  $l$  y aristas paralelas  $e$  y  $f$ .

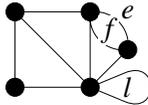


Figura 5.2: Multigrafo

Un grafo  $G' = (V', E')$  es un *subgrafo* de  $G = (V, E)$  si  $V' \subset V$  y  $E' \subset E$ . Cuando  $V' = V$ , el subgrafo  $G'$  se llama *subgrafo generador* de  $G$ . Dado  $V' \subset V$ , si el subgrafo  $G' = (V', E')$  contiene todas las aristas que unen en  $G$  dos vértices de  $V'$ , entonces se dice que  $G'$  es el *subgrafo inducido* por  $V'$  y se denota con  $G[V']$ . Por ejemplo, dado  $W \subset V(G)$ ,  $G - W = G[V \setminus W]$  es el subgrafo que resulta de suprimir en  $G$  los vértices del conjunto  $W$  y todas las aristas incidentes con estos vértices. En particular, dado un vértice  $u \in V$ , el subgrafo  $G - u = G - \{u\}$  es el obtenido eliminando el vértice  $u$  y todas las aristas incidentes con  $u$ . En cambio, la supresión de aristas no implica la eliminación de los vértices incidentes con estas aristas. Dado el grafo  $G$  y el subconjunto de aristas  $F \subset E(G)$ , el subgrafo  $G - F$  es simplemente  $(V, E \setminus F)$ . Si  $F$  está formado por una única arista  $e$ , entonces el grafo  $G - F$  se denotará por  $G - e$ . Ver la figura 5.3.

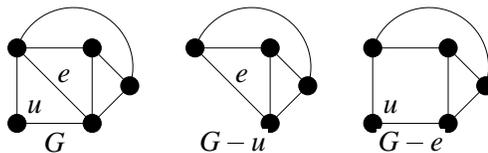


Figura 5.3: Supresión de un vértice y de una arista

Dado  $u \in V(G)$ ,  $\Gamma(u)$  denota el conjunto de vértices adyacentes con  $u$  y su número,  $d(u)$ , es el grado del vértice  $u$ . El grado mínimo y el grado máximo son parámetros del grafo definidos por  $\delta = \delta(G) = \min_{u \in V} \{d(u)\}$  y  $\Delta = \Delta(G) = \max_{u \in V} \{d(u)\}$  respectivamente. Si  $\delta = \Delta = d$ , se dice que  $G$  es un grafo  $d$ -regular. Cuando  $G$  es un multigrafo, el grado de un vértice se define como el número de aristas incidentes con este vértice (contando cada lazo dos veces).

Al sumar todos los grados de los vértices de un grafo, cada arista  $e = uv$  se cuenta dos veces (una vez desde cada uno de los dos vértices  $u$  y  $v$  incidentes con  $e$ ). Así, se tiene el resultado siguiente:

**Teorema 5.1.** Dado un grafo (multigrafo)  $G = (V, E)$ , se cumple

$$\sum_{u \in V} d(u) = 2|E|$$

Este resultado se conoce como el lema de las manos estrechadas (*handshaking lemma*) porque se puede formular diciendo que en toda reunión de personas el número total de manos que se estrechan, cuando las personas se saludan entre ellas, es siempre par. Una consecuencia inmediata del teorema anterior es la siguiente:

**Corolario 5.2.** En todo grafo (multigrafo)  $G$  el número de vértices con grado impar es par.

*Demostración.* Separando en la suma  $\sum_{u \in V} d(u)$  los términos correspondientes a vértices de grado par de aquellos correspondientes a vértices de grado impar se tiene

$$2|E| = \sum_{d(u) \text{ par}} d(u) + \sum_{d(u) \text{ impar}} d(u)$$

donde, siendo el primer sumando y la suma pares, el segundo sumando ha de ser también par.  $\square$

Dos grafos  $G$  y  $H$  se llaman *isomorfos* si existe una biyección  $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$  entre los correspondientes conjuntos de vértices, llamada *isomorfismo*, que preserva las adyacencias, es decir,  $uv \in E(G) \iff \phi(u)\phi(v) \in E(H)$ . Dos grafos isomorfos sólo se diferencian por la rotulación de los vértices (y, en general, por su representación gráfica). Por ejemplo, los grafos de la figura 5.4 son isomorfos con  $\phi(i) = i'$ .

Cuando dos grafos son isomorfos tienen, obviamente, el mismo orden, el mismo tamaño y el mismo número de vértices de un grado determinado. Todos estos parámetros son ejemplos de parámetros invariantes por isomorfismos. Un *invariante* de un grafo  $G$  es un número asociado a  $G$  que toma el mismo valor para cada grafo isomorfo a  $G$ . Dado un grafo, no se conoce ningún conjunto completo de invariantes, es decir, un conjunto de invariantes que determinen el grafo salvo isomorfismos.

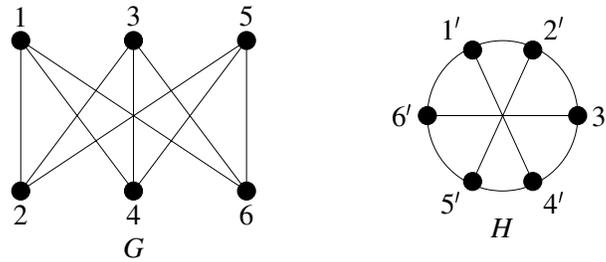


Figura 5.4: Grafos isomorfos

## 5.2 Caminos, conectividad y distancia

Dado un grafo  $G = (V, E)$ , una secuencia de vértices  $u_0, u_1, \dots, u_l$  con  $u_{i-1}u_i \in E$ ,  $1 \leq i \leq l$ , y  $u_{i-1}u_i \neq u_{j-1}u_j$  si  $i \neq j$ , se llama un *recorrido*  $R$  de longitud  $l$  entre  $u_0$  y  $u_l$ . Es preciso notar que todas las aristas de un recorrido son distintas. Cuando interese considerar en  $G$  recorridos que también repiten aristas se indicará explícitamente. Un *circuito* es un recorrido cerrado, es decir, un recorrido en el cual  $u_0 = u_l$ . Cuando todos los vértices de  $R$  son distintos se tiene un *camino*, y un *ciclo* es un camino cerrado. Por ejemplo, en el grafo de la figura 5.5,  $u, v, w, z, v, t$  es un recorrido;  $u, v, z, w, t$  es un camino;  $u, v, w, z, v, t, u$  es un circuito y, finalmente,  $u, v, t, u$  es un ciclo. A veces interesa considerar un camino o un ciclo  $C = u_0, u_1, \dots, u_l$  como un subgrafo de  $G$  con  $V(C) = \{u_0, u_1, \dots, u_l\}$  y  $E(C)$  el conjunto de aristas correspondiente.

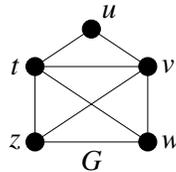


Figura 5.5: Recorridos en un grafo

Si entre todo par de vértices de  $G$  existe un camino, el grafo se dice *conexo* y, en este caso, la *distancia*,  $d(u, v)$ , entre dos vértices  $u$  y  $v$  es la longitud mínima de un camino entre estos vértices. En un grafo conexo  $G$ , la distancia es una métrica, ya que para todo  $u, v, w \in V(G)$  se cumple:

- $d(u, v) \geq 0$  y  $d(u, v) = 0$  si y sólo si  $u = v$ ;
- $d(u, v) = d(v, u)$ ;
- $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ .

Si  $G$  es conexo, su *diámetro*,  $D = D(G)$ , es la más grande de las distancias en el grafo:

$$D = \max_{u,v \in V(G)} \{d(u,v)\} \quad (5.1)$$

mientras que la *distancia media*,  $\bar{D}$ , se define como

$$\bar{D} = \frac{1}{|V(G)|^2} \sum_{u,v \in V(G)} d(u,v) \quad (5.2)$$

La *excentricidad* de un vértice  $u \in V(G)$  es la máxima de las distancias entre  $u$  y los otros vértices de  $G$ . Desde este punto de vista, el diámetro del grafo también se puede definir como la máxima de las excentricidades. Por otra parte, la mínima de las excentricidades de los vértices del grafo,  $r = r(G) = \min_{u \in V(G)} e(u)$ , se llama *radio*. El *centro* del grafo,  $Z(G)$ , es el conjunto de vértices con excentricidad igual a  $r$ .

**Proposición 5.3.** Si  $G$  es un grafo conexo, entonces

$$r(G) \leq D(G) \leq 2r(G)$$

*Demostración.* La desigualdad  $r(G) \leq D(G)$  es consecuencia inmediata de las definiciones de radio y diámetro. Por otra parte, si  $u$  y  $v$  son vértices de  $G$  tales que  $d(u,v) = D(G)$  y  $w \in Z(G)$ , se tiene, por la desigualdad triangular,  $D(G) \leq d(u,w) + d(w,v) \leq 2r(G)$ .  $\square$

**Ejercicio 5.4.** Dar ejemplos de grafos tales que  $r(G) = D(G)$  y  $r(G) = 2D(G)$ .

Un grafo  $G$  no conexo consta de dos o más *componentes*  $G_i$  donde cada  $G_i = (V_i, E_i)$  es un subgrafo inducido que es conexo y maximal respecto de esta propiedad, en el sentido que, si  $w \in V \setminus V_i$ , entonces el subgrafo inducido  $G[V_i \cup \{w\}]$  es no conexo.

Se dice que el vértice  $w \in V(G)$  es un *vértice de corte* si el número de componentes de  $G - w$  es más grande que el número de componentes de  $G$ . En particular, si  $G$  es conexo, la supresión de un vértice de corte desconecta  $G$  en dos o más componentes. Por ejemplo, en la figura 5.6 el vértice  $w$  es un vértice de corte y su supresión da lugar a un grafo con tres componentes.

**Ejercicio 5.5.** Demostrar que un vértice  $w$  es de corte si y sólo si existen  $u, v \in V(G)$ ,  $u, v \neq w$ , tales que  $w$  pertenece a cada camino entre  $u$  y  $v$ .

Un grafo *trivial* es un grafo con un único vértice. Salvo este caso, se tiene el resultado siguiente:

**Teorema 5.6.** Todo grafo no trivial tiene al menos dos vértices que no son de corte.

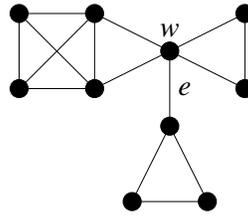


Figura 5.6:  $w$  es un vértice de corte y  $e$  es un puente

*Demostración.* Si el teorema fuese falso existiría un grafo conexo no trivial  $G$  con todos sus vértices de corte excepto, como mucho, uno. Sean  $u, w \in V(G)$  tales que  $d(u, w) = D(G)$  y supongamos que  $w$  es vértice de corte. Por otra parte, sea  $v$  un vértice tal que  $u$  y  $v$  pertenecen a componentes diferentes de  $G - w$ . Como todos los caminos entre  $u$  y  $v$  pasan por  $w$ , llegamos a la contradicción  $d(u, v) > d(u, w) = D(G)$ .  $\square$

En cuanto a las aristas, el concepto análogo al de vértice de corte es el de arista puente. Dado un grafo  $G$ , una arista  $e \in E(G)$  es un *puente* si el número de componentes de  $G - e$  es más grande que el número de componentes de  $G$ .

**Ejercicio 5.7.** Demostrar que si  $e$  es un puente, entonces  $G - e$  tiene exactamente un componente más que  $G$ .

### 5.3 Operaciones entre grafos

Muchas veces conviene expresar la estructura de un grafo  $G$  en términos de grafos más simples. Antes de introducir diversas operaciones entre grafos que permiten estas descomposiciones, se consideran algunas clases de grafos particularmente interesantes.

En el *grafo completo* de orden  $n$ ,  $K_n$ , cada vértice es adyacente a todos los otros. Así, el número de aristas de  $K_n$  es  $\binom{n}{2}$ . Un grafo formado por un único ciclo de longitud  $n$  se llama *grafo ciclo* de orden  $n$  y se denota  $C_n$ . Un *grafo camino* de orden  $n$ ,  $P_n$ , es aquel formado por un único camino de longitud  $n - 1$ . En la figura 5.7 se representan  $K_4$ ,  $C_4$  y  $P_4$  respectivamente.

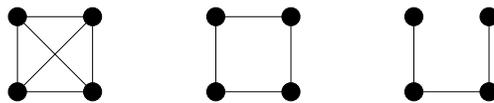


Figura 5.7: Grafos completo, ciclo y camino de orden 4

**Ejercicio 5.8.** Sea  $G$  un grafo con  $n$  vértices y  $k$  componentes. Demostrar la desigualdad siguiente:

$$|E(G)| \leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$$

Un grafo  $G$  es *bipartito* con *clases de vértices*  $V_1$  y  $V_2$  si  $V(G) = V_1 \cup V_2$ ,  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ , y cada arista une un vértice de  $V_1$  con un vértice de  $V_2$ . En el grafo *bipartito completo*,  $K_{n,m}$ ,  $|V_1| = n$ ,  $|V_2| = m$ , y cada vértice de  $V_1$  es adyacente con todos los vértices de  $V_2$ . Por ejemplo, los grafos representados en la figura 5.4 son isomorfos a  $K_{3,3}$ . De forma más general, un grafo  $G$  es *r-partito* si  $V(G) = \bigcup_{i=1}^r V_i$ ,  $V_i \cap V_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ , y cada arista une vértices de clases diferentes.

El *complemento*  $\overline{G}$  de un grafo  $G$  es el grafo con conjunto de vértices  $V(\overline{G}) = V(G)$  y  $uv \in E(\overline{G})$  si y sólo si los vértices  $u$  y  $v$  son independientes en  $G$ . El complementario del grafo completo  $K_n$  no tiene ninguna arista y se llama grafo *nulo*  $N_n$  de orden  $n$ .

Dados dos grafos  $G$  y  $H$ , su *unión*  $G \cup H$  es el grafo  $(V(G) \cup V(H), E(G) \cup E(H))$ . Por ejemplo, si  $G$  es un grafo no conexo con componentes  $G_1, G_2, \dots, G_n$ , entonces  $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n$ . Ver la figura 5.8a. También, si  $G_1, G_2, \dots, G_n$  son subgrafos generadores de  $G$  disyuntos en aristas y  $\bigcup_i E(G_i) = E(G)$ , entonces podemos expresar  $G$  como  $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n$ .

La *intersección*  $G \cap H$  es el grafo  $(V(G) \cap V(H), E(G) \cap E(H))$ .

La *suma*  $G + H$  de los grafos  $G$  y  $H$ , con conjuntos de vértices disyuntos, tiene también conjunto de vértices  $V(G) \cup V(H)$ , pero ahora el conjunto de aristas es  $E(G) \cup E(H) \cup \{uv \mid u \in V(G) \text{ y } v \in V(H)\}$ . Por ejemplo, el grafo bipartito completo  $K_{m,n}$  se puede expresar como  $\overline{K_m} + \overline{K_n}$  (Fig. 5.8b).

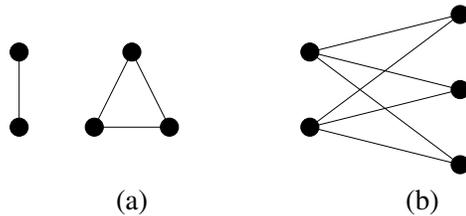


Figura 5.8: (a)  $K_2 \cup K_3$  (b)  $\overline{K_2} + \overline{K_3}$

El *producto cartesiano*  $G \times H$ , con  $V(G) \cap V(H) = \emptyset$ , es el grafo que tiene por conjunto de vértices  $V(G) \times V(H)$  y dos vértices  $(u_g, u_h), (v_g, v_h) \in V(G \times H)$  son adyacentes si y sólo si

$$u_g = v_g \text{ y } u_h v_h \in E(H)$$

o

$$u_h = v_h \text{ y } u_g v_g \in E(G)$$

Por ejemplo, el *hipercubo* de dimensión  $n$ ,  $Q_n$ , que tiene por conjunto de vértices

$$V(Q_n) = \{u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \{0, 1\}\}$$

siendo dos vértices  $u$  y  $v$  adyacentes si y sólo si las secuencias correspondientes difieren sólo en un dígito, puede expresarse como

$$Q_n = \overbrace{K_2 \times K_2 \times \dots \times K_2}^n$$

El orden de  $Q_n$  es  $2^n$ . Ver la figura 5.9.

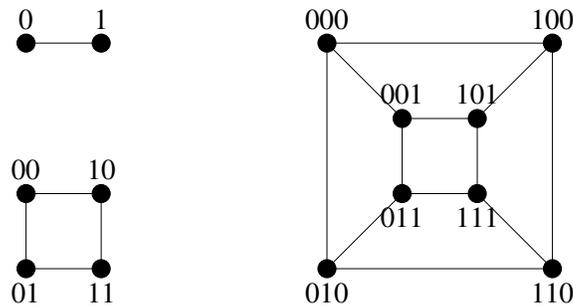


Figura 5.9: Los hipercubos de dimensión 1, 2 y 3

Finalmente, otra operación interesante es la *suma binaria* de  $G$  y  $H$  definida por  $G \oplus H = (V(G) \cup V(H), E(G) \triangle E(H))$  donde  $\triangle$  denota la diferencia simétrica de conjuntos. Es decir,  $e$  es una arista de  $G \oplus H$  si  $e$  es arista de  $G$  o de  $H$ , pero no de los dos grafos a la vez. Cuando los grafos  $G$  y  $H$  tienen conjuntos de aristas disyuntos,  $G \oplus H$  es isomorfo a  $G \cup H$ . Esta operación se utilizará en el capítulo 7 en relación a la estructura de ciclos de un grafo.

## 5.4 Digrafos

El concepto de *grafo dirigido* o *digrafo* deriva directamente del de grafo exigiendo que las aristas, ahora llamadas *arcos*, sean pares ordenados de vértices distintos. Así, un digrafo  $G = (V, A)$  es una estructura combinatoria formada por un par  $(V, A)$  de conjuntos disyuntos tales que  $A \subset V \times V$ . Si  $a = (u, v) \in A$ , decimos que el vértice  $u$  es *adyacente hacia el vértice*  $v$  y que  $v$  es *adyacente desde*  $u$ . Como en el caso no dirigido, cuando se permiten lazos y/o arcos paralelos se tiene un multidigrafo; ver la figura 5.10.

En un digrafo  $G = (V, A)$  es preciso distinguir entre *grado de entrada*  $d^-(u) = |\Gamma^-(u)|$  y *grado de salida*  $d^+(u) = |\Gamma^+(u)|$ , siendo ahora  $\Gamma^-(u) = \{w \in V : (w, u) \in A\}$  y  $\Gamma^+(u) =$

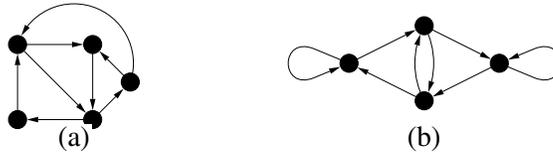


Figura 5.10: (a) Digrafo (b) Multidigrafo

$\{w \in V : (u, w) \in A\}$  los conjuntos de vértices adyacentes hacia y desde  $u$  respectivamente. El digrafo es  $d$ -regular si  $d^+(u) = d^-(u) = d$ , para todo  $u \in V$ . El resultado correspondiente al teorema 5.1 es el siguiente:

$$\sum_{u \in V} d^+(u) = \sum_{u \in V} d^-(u)$$

Los conceptos de recorrido, camino, circuito y ciclo tienen ahora un carácter dirigido. Por ejemplo, un camino desde el vértice  $u_0$  hasta el vértice  $u_l$  es una sucesión de vértices distintos  $u_0, u_1, \dots, u_l$  tal que  $u_{i-1}$  es adyacente hacia  $u_i$ ,  $1 \leq i \leq l$ . La distancia en un digrafo no tiene la propiedad simétrica, ya que, en general,  $d(u, v) \neq d(v, u)$ . El diámetro y la distancia media se definen también por las ecuaciones 5.1 y 5.2.

Un digrafo  $G$  es *simétrico* si dados  $u, v \in V(G)$  se tiene  $(u, v) \in A(G)$  si y sólo si  $(v, u) \in A(G)$ . Así, un grafo  $G$  se puede representar por su *digrafo simétrico asociado*  $G^*$  obtenido a partir de  $G$  substituyendo cada arista  $uv$  de  $G$  por el par de arcos  $(u, v), (v, u)$ .

Dado un digrafo  $G$ , su grafo (multigrafo) *subyacente* es el grafo (multigrafo) que resulta de  $G$  cuando se suprime la orientación de los arcos.

En un digrafo se pueden distinguir diferentes tipos de conectividad. El digrafo  $G$  es *débilmente conexo* si el grafo (multigrafo) que resulta al suprimir las direcciones de los arcos es conexo.  $G$  es *unilateralmente conexo* si para todo  $u, v \in V(G)$  existe un camino de  $u$  hacia  $v$  o un camino de  $v$  hacia  $u$ . Finalmente, el digrafo  $G$  es *fuertemente conexo* si para todo  $u, v \in V(G)$  existe un camino de  $u$  hacia  $v$ . La conectividad fuerte implica la unilateral y esta implica la débil.

Como en el caso de grafos, un isomorfismo entre dos digrafos es una biyección entre sus conjuntos de vértices que preserva las adyacencias dirigidas.

## 5.5 Representación matricial

Como ya se ha indicado, un grafo o un digrafo puede visualizarse mediante un dibujo en que cada vértice se representa por un punto y cada arista o arco por una línea o línea dirigida respectivamente. No obstante, cuando se requiere el procesamiento por ordenador, resulta más

conveniente disponer de representaciones matriciales del grafo o digrafo. En esta sección se discuten las dos más importantes.

### Matriz de adyacencia

La *matriz de adyacencia* de un grafo  $G$  con conjunto de vértices  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es la matriz cuadrada  $A = A(G)$ ,  $n \times n$ , definida por:

$$(A)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } v_i v_j \in E(G) \\ 0, & \text{de otro modo} \end{cases} \quad (5.3)$$

La matriz  $A$  es simétrica con elementos nulos en la diagonal. Por otra parte, el número de elementos iguales a 1 en la fila (o columna)  $i$  de  $A(G)$  es  $d(v_i)$ , el grado del vértice  $v_i$  o, lo que es equivalente, el número de caminos de longitud 1 que comienzan en el vértice  $v_i$ . De forma más general, las potencias de  $A$  dan información sobre los caminos en  $G$ .

**Teorema 5.9.** El elemento  $(A^k)_{ij}$  es igual al número de recorridos (pudiendo repetir vértices y/o aristas) de longitud  $k$  entre  $v_i$  y  $v_j$ .

*Demostración.* Por inducción sobre  $k$ . La proposición se cumple si  $k = 1$ . Para  $k > 1$ :

$$(A^k)_{ij} = (A^{k-1}A)_{ij} = \sum_{l=1}^n (A^{k-1})_{il}(A)_{lj}$$

El término general  $(A^{k-1})_{il}(A)_{lj}$  de la suma anterior sólo es no nulo si  $(A^{k-1})_{il} \geq 1$  y  $(A)_{lj} = 1$ . Pero en este caso, si  $(A^{k-1})_{il} = m$ , existen  $m$  recorridos de longitud  $k$  entre  $v_i$  y  $v_j$  que acaban con la arista  $v_l v_j$ . Como  $v_l$  es un vértice cualquiera, sumando para todo  $l$  se tiene el resultado.  $\square$

**Corolario 5.10.** En un grafo conexo  $G$ , la distancia entre dos vértices  $v_i$  y  $v_j$  es  $k$  si y sólo si  $k$  es el menor entero no negativo tal que  $(A^k(G))_{ij} \neq 0$ .

*Ejemplo:* La matriz de adyacencia del grafo  $G$  de la figura 5.5, ordenando los vértices de la forma  $v_1 = u$ ,  $v_2 = v$ ,  $v_3 = w$ ,  $v_4 = z$  y  $v_5 = t$ , es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculando  $A^2$ :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Así, por ejemplo, el elemento  $(A^2)_{25} = 3$  indica la existencia de tres recorridos de longitud 2 entre los vértices  $v_2 = v$  y  $v_5 = t$ :  $v, u, t$ ;  $v, w, t$  y  $v, z, t$ . Por otra parte, la existencia de elementos nulos en la matriz  $A$  y el hecho que todos los elementos de  $A^2$  sean diferentes de cero demuestra que el diámetro del grafo es 2 (¿por qué?).

Las permutaciones de las filas y de las columnas correspondientes de la matriz  $A(G)$  equivalen a reordenar los vértices del grafo. Así se tiene el resultado siguiente:

**Teorema 5.11.** Dos grafos  $G$  y  $H$  son isomorfos si y sólo si

$$A(H) = P^{-1}A(G)P$$

donde  $P$  es una matriz de permutaciones.

La ecuación 5.3 define también la matriz de adyacencia de un multigrafo sin aristas paralelas. En este caso, la presencia de un lazo en el vértice  $v_i$  corresponde a tener  $(A)_{ii} = 1$ .

La matriz de adyacencia de un digrafo se define de forma análoga. Ahora bien, cualquier matriz binaria  $n \times n$  (y no sólo las simétricas) puede ser la matriz de adyacencia de un digrafo de orden  $n$ . El número de unos en la fila  $i$  de la matriz es  $d^+(v_i)$ , mientras que  $d^-(v_i)$  corresponde al número de unos en la columna  $i$ .

### Matriz de incidencia

Sea  $G$  un grafo con  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y  $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ . La *matriz de incidencia*  $B = B(G)$  es la matriz  $n \times m$  definida por:

$$(B)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ es incidente con } e_j \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases} \quad (5.4)$$

Como en el caso de la matriz de adyacencia, el número de unos en la fila  $i$  de  $B$  corresponde al grado del vértice  $v_i$ . En cambio, cada columna contiene exactamente dos unos.

Las matrices de incidencia permiten representar multigrafos sin lazos. En este caso, las columnas repetidas de  $B(G)$  manifiestan la existencia de aristas paralelas.

Si  $G$  es un digrafo,  $B(G)$  se define como

$$(B)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } v_i \text{ es incidente hacia el arco } a_j \\ -1, & \text{si } v_i \text{ es incidente desde el arco } a_j \\ 0, & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Las matrices de adyacencia y de incidencia de un grafo  $G$  representan su estructura y por ello han de estar relacionadas. Para expresar esta relación, sea  $D$  la matriz diagonal tal que  $(D)_{ii}$  es el grado  $d(v_i)$  del vértice  $i$ -ésimo de  $V(G)$ .

**Teorema 5.12.**  $BB^t = A + D$

*Demostración.* Sea  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y  $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ . Si  $i \neq j$ ,

$$(BB^t)_{ij} = \sum_{k=1}^m b_{ik}b_{jk} = a_{ij}$$

ya que  $b_{ik}b_{jk}$  sólo es diferente de 0 (y vale 1) si  $e_k = v_iv_j$ .

De otro modo, si  $i = j$ ,

$$(BB^t)_{ii} = \sum_{k=1}^m b_{ik}b_{ik} = d(v_i)$$

ya que, ahora,  $\sum_{k=1}^m b_{ik}b_{ik}$  cuenta el número de aristas incidentes con  $v_i$ . □

**Ejercicio 5.13.** Comprobar el teorema anterior en el grafo de la figura 5.5.

Las matrices  $A(G)$  y  $B(G)$  constituyen la base de las estructuras de datos más comúnmente utilizadas para representar un grafo o un digrafo en la memoria de un ordenador. Sin embargo, si  $|E(G)|$  es mucho menor que  $|V(G)|^2$ , la forma más económica de representación será una *lista de incidencia*, que es una lista encadenada que da para cada vértice  $v$  las aristas o los arcos de los cuales  $v$  es incidente.

## 5.6 Grafos y redes de interconexión

El diseño de redes de interconexión se ha convertido en un problema fundamental en las ingenierías de telecomunicación y telemática, así como también en las ciencias de los computadores. Así, por ejemplo, la tecnología *VLSI* de integración de circuitos a gran escala permite, actualmente, la construcción de sistemas de cálculo constituidos por miles de procesadores conectados entre ellos, mediante módulos de memoria compartidos, con el objetivo de aprovechar el paralelismo inherente a las tareas que les son asignadas. Estos sistemas multiprocesadores requieren redes de interconexión de gran complejidad y es preciso señalar que la eficacia y el

rendimiento del sistema dependen, en gran parte, de la elección adecuada del mecanismo de interconexión entre sus diferentes elementos. Otros ejemplos de sistemas que requieren redes de interconexión complejas los encontramos en las diferentes redes telefónicas y telemáticas nacionales e internacionales.

Un grafo puede modelar una red de interconexión. Los vértices del grafo corresponden a los nodos de la red y las aristas a los enlaces. Si estos enlaces tienen carácter unidireccional, es decir, si sólo es posible la comunicación en un sentido, entonces la topología de la red corresponderá a un digrafo.

Los parámetros y las propiedades más importantes a tener en cuenta en el diseño de la red corresponden a parámetros análogos en el grafo que la modela. Ver, por ejemplo, la referencia [2]. Así, el retardo máximo de las comunicaciones entre nodos de la red será, en general, proporcional al diámetro  $D$  del grafo que la modela. Por otra parte, por razones de carácter técnico, el número máximo de enlaces incidentes con un nodo determinado suele ser limitado. Esto hace que el grado máximo  $\Delta$  del grafo correspondiente esté también acotado. En este sentido, un problema de optimización interesante es el llamado *problema*  $(\Delta, D)$  que consiste en encontrar el número máximo de vértices que puede tener un grafo con grado máximo  $\Delta$  y diámetro  $D$ , así como también obtener grafos óptimos con este orden máximo. Ver los problemas 19 y 20 al final del capítulo.

Otro parámetro fundamental a tener en cuenta a la hora de diseñar una red de interconexión es su fiabilidad, es decir, la capacidad de la red para continuar funcionando, quizá de forma degradada, aunque falle alguno de sus elementos—nodos y/o enlaces. La fiabilidad de la red corresponde a la conectividad del grafo que la modela. La conectividad, que se estudiará en el capítulo 8, mide el número mínimo de vértices y/o aristas que se han de suprimir en el grafo para desconectarlo. Por ello interesa que el grafo que modela la red tenga un valor de conectividad tan grande como sea posible.

Finalmente, otra característica que es preciso señalar es que la red permita algoritmos de encaminamiento de los mensajes que sean a la vez simples y eficientes. Esta característica se debe tener en cuenta en el grafo que modela la red a la hora de definir las reglas de adyacencia entre sus vértices.

## 5.7 Planaridad: la fórmula de Euler

De forma intuitiva, un grafo es planar cuando se puede dibujar en el plano sin que sus aristas se crucen. De manera más precisa, diremos que un grafo  $G$  con orden  $n$  y tamaño  $m$  es *planar* si es posible distinguir en el plano un conjunto  $V$  de  $n$  puntos distintos—que corresponden a los vértices de  $G$ —y un conjunto  $E$  de  $m$  curvas, disjuntas dos a dos, excepto posiblemente en sus extremos—que corresponden a las aristas de  $G$ —de tal forma que, si la curva  $C$  corresponde

a la arista  $uv$ , entonces sólo los puntos extremos de  $C$  corresponden a vértices de  $G$ , precisamente  $u$  y  $v$ . Diremos que el par  $(V, E)$  es una *realización plana* de  $G$ . Por ejemplo, el grafo  $K_4$  representado en la figura 5.11(a) es planar y en la figura 5.11(b) se da una realización plana del mismo. Una realización plana de un grafo planar  $G$  divide el plano en un cierto número

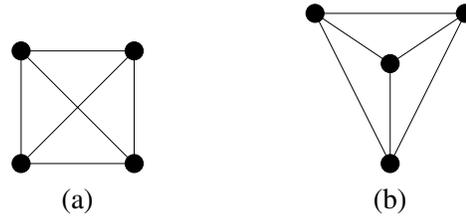


Figura 5.11: (a)  $K_4$  (b) Realización plana de  $K_4$

de regiones, siendo una *región* de  $G$  una porción maximal del plano tal que dos puntos cualesquiera de la misma pueden unirse mediante una curva  $C$ , de tal forma que ningún punto de  $C$  corresponde a un vértice de  $G$  ni pertenece a ninguna de las curvas correspondientes a las aristas de  $G$ . Toda realización plana de un grafo planar  $G$  da lugar a una región no acotada llamada la *región exterior* de  $G$ .

**Ejercicio 5.14.** Demostrar que todo grafo  $G$  que no contiene ciclos es planar y que toda realización plana de  $G$  da lugar a una única región.

El número de regiones,  $r = r(G)$ , no depende de la realización plana de  $G$  que se considere. En efecto, se cumple el resultado siguiente:

**Teorema 5.15 (fórmula de Euler).** Sea  $r$  el número de regiones en una realización plana de un grafo conexo y planar con orden  $n$  y tamaño  $m$ . Entonces,

$$n - m + r = 2 \quad (5.5)$$

*Demostración.* El resultado se puede demostrar por inducción sobre el número de aristas  $m$ . La fórmula 5.5 se cumple trivialmente si  $m = 0$ , ya que, en este caso, se tiene  $n = 1$  y  $r = 1$ . Supongamos que el teorema es cierto para todos los grafos conexos y planares con número de aristas  $k < m$ ,  $m \geq 1$ , y demostremos que entonces también se cumple si el tamaño del grafo es  $m$ . Sea  $G$  un grafo conexo y planar con  $m$  aristas. Si  $G$  no contiene ciclos, entonces  $r = 1$  y, tal como se demostrará en el capítulo siguiente, su orden  $n$  tiene que ser  $m + 1$ . Por tanto, la fórmula 5.5 se cumple en este caso. De otro modo, si  $G$  contiene algún ciclo, consideremos una realización plana de  $G$  con  $r$  regiones y sea  $e$  una arista que pertenezca a un ciclo de  $G$ . Suprimiendo  $e$ , obtenemos una realización plana de  $G - e$  con  $r - 1$  regiones. Por otra parte,

el orden y el tamaño de  $G - e$  son  $n$  y  $m - 1$  respectivamente. Así pues, por la hipótesis de inducción, se tiene  $n - (m - 1) + (r - 1) = 2$ , es decir  $n - m + r = 2$ .  $\square$

**Ejercicio 5.16.** Demostrar que si  $G$  es planar con orden  $n$ , tamaño  $m$  y  $k$  componentes, entonces se cumple  $n - m + r = 1 + k$ , siendo  $r$  el número de regiones de toda realización plana de  $G$ .

Los dos resultados siguientes, que dan condiciones necesarias para que un grafo sea planar, son consecuencia de la fórmula de Euler.

**Teorema 5.17.** Sea  $G$  un grafo planar y conexo con  $n$  vértices,  $n \geq 3$ , y  $m$  aristas. Entonces,

$$m \leq 3n - 6$$

*Demostración.* Podemos suponer que  $G$  contiene algún ciclo, ya que, de otro modo,  $m = n - 1$  (como se ha indicado antes) y el teorema se cumple. En toda realización plana de  $G$ , la frontera de cada región contiene un número de aristas  $f_i$  más grande o igual a 3. Así,  $\sum_{i=1}^r f_i \geq 3r$ . Pero la suma anterior vale  $2m$ , ya que cada arista pertenece a la frontera de dos regiones (si existen vértices de grado 1, la suma anterior es menor que  $2m$ ). Por tanto,  $2m \geq 3r$ . Aplicando ahora la fórmula de Euler, se tiene  $2m \geq 3r = 3(2 - n + m) = 6 - 3n + 3m$ , es decir,  $m \leq 3n - 6$ .  $\square$

**Ejercicio 5.18.** Demostrar la validez del teorema 5.17 aunque  $G$  sea un grafo no conexo.

**Corolario 5.19.** Todo grafo planar tiene como mínimo un vértice de grado menor que 6.

*Demostración.* Recordemos que la suma de los grados de los vértices de un grafo vale  $2m$ , donde  $m$  es el número de aristas. Por tanto, si todos los vértices tuviesen grado más grande o igual a 6, se tendría  $2m \geq 6n$ , siendo  $n$  el orden del grafo. Pero si  $G$  es planar, por el teorema anterior,  $2m \leq 6n - 12 < 6n$ . Así, algún vértice debe tener grado menor que 6.  $\square$

## 5.8 Caracterización de los grafos planares

Los grafos  $K_5$  y  $K_{3,3}$  juegan un papel esencial en la caracterización de los grafos planares.

**Teorema 5.20.** Los grafos  $K_5$  y  $K_{3,3}$  no son planares.

*Demostración.* El orden y el tamaño de  $K_5$  son  $n = 5$  y  $m = 10$  respectivamente. Por tanto,  $10 = m > 3n - 6 = 9$ , cosa que contradice el teorema 5.17. Así,  $K_5$  no es planar.

El grafo  $K_{3,3}$  es bipartito. No contiene, por tanto, ciclos de longitud 3. Así, si  $K_{3,3}$  fuese planar, la frontera de cada región de una realización plana del grafo sería un ciclo de longitud al menos 4. Por tanto, sumando para todas las regiones, se tendría  $4r \leq 2m$ , donde  $m = 9$  es

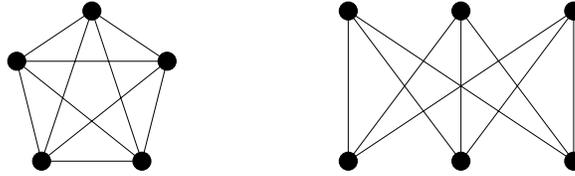


Figura 5.12: Los grafos  $K_5$  y  $K_{3,3}$

el número de aristas. Así, sería  $4r \leq 18$ . Por otra parte, dado que el orden de  $K_{3,3}$  es  $n = 6$ , la fórmula de Euler implicaría  $4r = 4(2 - n + m) = 4(2 - 6 + 9) = 20$ , y se llegaría a una contradicción. Por tanto, tampoco  $K_{3,3}$  es planar.  $\square$

Si  $G$  es un grafo planar, la “inserción” de un vértice de grado dos no modifica su planaridad. Por ejemplo, el grafo  $H$  de la figura 5.13 se ha obtenido del grafo  $G$  de la misma figura

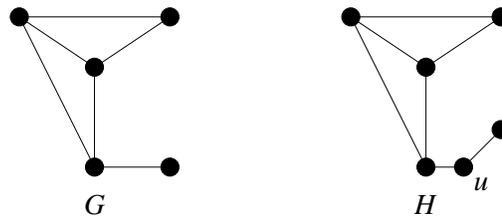


Figura 5.13: Subdivisión de una arista

insertando el vértice  $u$ .

De manera más formal, se dice que una arista  $e = uv$  de un grafo  $G$  se *subdivide* si  $e$  se sustituye por un camino  $u, t, v$  de longitud dos, donde  $t$  es un nuevo vértice añadido a  $V(G)$ . El grafo  $H$  es una *subdivisión* del grafo  $G$  si  $H$  es isomorfo a  $G$  o se obtiene de  $G$  mediante una sucesión de subdivisiones de aristas.

La demostración de las proposiciones siguientes se deja como ejercicio.

**Proposición 5.21.** Si  $G$  es un grafo no planar, entonces todo grafo  $H$ , subdivisión de  $G$ , es no planar.

**Proposición 5.22.** Si  $G$  es un grafo planar, entonces cada subgrafo de  $G$  es planar.

Por tanto, si un grafo  $G$  contiene algún subgrafo que sea subdivisión de  $K_5$  o  $K_{3,3}$ , entonces  $G$  es no planar. Es decir, si  $G$  es un grafo planar, entonces no puede contener ningún subgrafo que sea subdivisión de  $K_5$  o  $K_{3,3}$ . Curiosamente, esta condición necesaria es también suficiente.

Esta proposición constituye el teorema de Kuratowski, que da la caracterización de los grafos planares.

**Teorema 5.23.** Un grafo es planar si y sólo si no contiene ningún subgrafo que sea subdivisión de  $K_5$  o  $K_{3,3}$ .

## Notas bibliográficas

Los libros de Bollobás [3], Bondy y Murty [4], Chartrand y Lesniak [5] y Harary [6] son textos clásicos que cubren los diversos temas de la teoría de grafos con más profundidad de lo que se hace en este libro. El libro de Wilson [7] constituye una buena introducción. También es preciso mencionar el texto de Basart [1]. El artículo de Bermond, Delorme y Quisquater [2] da una visión excelente de la aplicación de la teoría de grafos al diseño de buenas topologías para redes de interconexión.

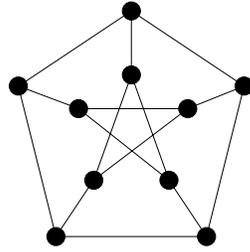
Finalmente, el tema de planaridad y la demostración del teorema de Kuratowski se puede estudiar, por ejemplo, en el libro de Chartrand y Lesniak [5] mencionado antes.

## Bibliografía

- [1] J. M. Basart. *Grafos: Fundamentos y Algoritmos*, Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona, 1993.
- [2] J.-C. Bermond, C. Delorme, J.-J. Quisquater. “Strategies for interconnection networks: some methods from graph theory”, *J. Parallel and Distributed Computing*, **3**, pp. 433–449, 1986.
- [3] B. Bollobás. *Graph Theory*, Springer, 1979.
- [4] J. A. Bondy, U. S. R. Murty. *Graph Theory with Applications*, North Holland, 1976.
- [5] G. Chartrand, L. Lesniak. *Graphs and Digraphs*, Wadsworth & Brooks, 1986.
- [6] F. Harary. *Graph Theory*, Addison Wesley, 1972.
- [7] R. J. Wilson. *Introducción a la Teoría de Grafos*, Alianza Universidad, vol. 367, Alianza Editorial, 1983.

## Problemas

1. (a) Determinar todos los grafos de orden 4 y tamaño 3 con conjunto de vértices  $V = \{1, 2, 3, 4\}$ ;  
(b) determinar todos los grafos no isomorfos de orden 4 y tamaño 3;  
(c) determinar todos los grafos no isomorfos de orden 4;  
(d) determinar todos los grafos no isomorfos de orden 5.
2. Una lista  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$  de enteros no negativos,  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ , se dice que es la *secuencia de grados* de un grafo  $G$  de orden  $n$  si los vértices de  $G$  se pueden etiquetar de la forma  $v_1, v_2, \dots, v_n$  con  $d(v_i) = d_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Dibujar un grafo de orden 8 y secuencia de grados  $(2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4)$ .
3. Demostrar que la relación “ser isomorfo a” es, en la colección de todos los grafos, una relación de equivalencia.
4. Sea  $G$  un grafo con exactamente dos vértices de grado impar. Demostrar que existe un camino entre estos dos vértices.
5. Demostrar que para todo grafo  $G$  de orden 6, o bien  $G$ , o bien  $\overline{G}$  contiene un triángulo (es decir, contiene  $K_3$  como subgrafo).
6. Demostrar que, si  $G$  es un grafo no conexo, entonces su complemento  $\overline{G}$  es conexo.
7. Demostrar que todo grafo  $G$  de orden  $n$ ,  $n > 1$ , y tamaño más grande que  $(n-1)(n-2)/2$  es conexo.
8. Sea  $G$  un grafo con  $n$  vértices tal que  $d(u) \geq (n-1)/2$  para todo vértice  $u$ . Demostrar que  $G$  es conexo.
9. Sea  $e$  una arista de un grafo conexo  $G$ . Demostrar que  $G - e$  es conexo si y sólo si  $e$  no pertenece a ningún ciclo de  $G$ .
10. Demostrar que un grafo es bipartito si y sólo si todos sus ciclos tienen longitud par.
11. Sean  $P_1$  y  $P_2$  dos caminos distintos entre dos vértices  $u, v$  de un grafo  $G$ . Demostrar que  $P_1 \oplus P_2$  es un ciclo o un conjunto de ciclos en  $G$ .
12. Un *automorfismo* de un grafo  $G$  es un isomorfismo de  $G$  en él mismo. Dar ejemplos de automorfismos no triviales en los grafos siguientes:  $K_n$ ,  $K_{n,m}$  y el *grafo de Petersen*  $P$  representado en la figura 5.14.

Figura 5.14: El grafo de Petersen  $P$ 

13. Un grafo  $G$  es *vértice-transitivo* o *vértice-simétrico* si para todo  $u, v \in V(G)$  existe un automorfismo  $\phi$  de  $G$  tal que  $\phi(u) = v$ . Demostrar que el grafo de Petersen es vértice-transitivo.
14. El *giro* de un grafo  $G$ ,  $g = g(G)$ , es la menor longitud de un ciclo contenido en  $G$ . Determinar los grafos 3-regulares con orden mínimo y
  - (a)  $g = 4$ ;
  - (b)  $g = 5$ .
15. Sea  $Q_n$  el hipercubo de dimensión  $n$ .
  - (a) Calcular su tamaño;
  - (b) calcular su diámetro;
  - (c) demostrar que es un grafo bipartito.
16. Sea  $G$  un digrafo con grado mínimo de salida  $\delta^+(G) = \min_{u \in V(G)} \{d^+(u)\} > 0$ . Demostrar que  $G$  contiene un ciclo dirigido.
17. Los *autovalores* de un grafo  $G$  son los autovalores de su matriz de adyacencia.
  - (a) Calcular los autovalores de  $K_4$ ,  $K_{1,3}$  y del grafo de Petersen;
  - (b) demostrar que la suma de los autovalores de  $G$  vale 0;
  - (c) demostrar que la suma de sus cuadrados es  $2|E(G)|$ ;
  - (d) determinar los autovalores de  $K_n$ .
18. Sea  $G$  un grafo conexo. Demostrar que  $G$  es  $d$ -regular si y sólo si  $d$  es autovalor de  $G$ .

19. Demostrar que el número máximo de vértices que puede tener un grafo con grado máximo  $\Delta$  y diámetro  $D$  es

$$n(\Delta, D) = \begin{cases} 2D + 1, & \text{si } \Delta = 2 \\ \frac{\Delta(\Delta-1)^{D-2}}{\Delta-2}, & \text{si } \Delta > 2 \end{cases}$$

El número  $n(\Delta, D)$  se conoce como *cota de Moore*.

20. Demostrar que el número máximo de vértices que puede tener un digrafo  $d$ -regular con diámetro  $D$  es

$$n(d, D) = \begin{cases} D + 1, & \text{si } d = 1 \\ \frac{d^{D+1} - 1}{d - 1}, & \text{si } d > 1 \end{cases}$$

21. El *digrafo línea*  $LG = (V_L, A_L)$  de un digrafo  $G = (V, A)$  es el digrafo que se obtiene tomando como vértices los arcos de  $G$ , es decir,  $V_L = A$ , siendo  $u = (u, u') \in V_L$  adyacente hacia  $v = (v, v') \in V_L$  si y sólo si  $u' = v$ . Suponer que  $G$  es fuertemente conexo. Demostrar que:

- si  $G$  es  $d$ -regular, entonces  $LG$  también lo es;
- si  $G$  no es un ciclo dirigido, entonces  $D(LG) = D(G) + 1$ ;
- determinar  $LG$  y  $L(LG)$  si  $G$  es el digrafo completo de orden 3 en que cada vértice es adyacente hacia los otros dos.

22. Demostrar que el grafo de Petersen contiene un subgrafo que es subdivisión de  $K_{3,3}$  y que, por tanto, es no planar.

## Capítulo 6

# Árboles

1. Árboles
2. Árboles generadores
3. Número de árboles generadores
4. Obtención de todos los árboles generadores
5. Árboles generadores de coste mínimo

Supongamos que se quiere comunicar  $n$  nodos utilizando una red de interconexión que tenga el menor número posible de enlaces. Para permitir la comunicación entre dos nodos cualesquiera, el grafo  $G$  correspondiente a esta red tendrá que ser conexo y, por otra parte, no podrá contener ciclos, porque si tuviese y  $uv$  fuese una arista perteneciente a un ciclo, entonces el grafo  $G - uv$  sería aún conexo y tendría menor número de aristas que  $G$ . Por ejemplo, el grafo “estrella” de la figura 6.1 muestra la solución al problema planteado que tiene diámetro mínimo  $D = 2$ .

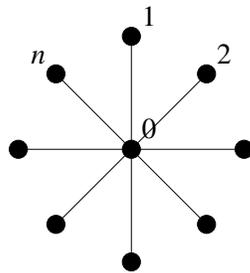


Figura 6.1: Estrella

La solución encontrada corresponde a un tipo de grafo conexo particularmente simple y con muchas aplicaciones: un árbol. En este capítulo estudiaremos las propiedades más importantes

de los árboles y también consideraremos los árboles como subgrafos generadores de otro grafo  $G$ . Este estudio lo aplicaremos a uno de los problemas clásicos de investigación operativa: la determinación de los árboles generadores de coste mínimo, y lo usaremos en el capítulo siguiente para el análisis de la estructura de ciclos fundamentales de un grafo.

## 6.1 Árboles

Un *árbol* es un grafo conexo y sin ciclos. La figura 6.2 muestra, por ejemplo, un árbol con orden 7. Este tipo de estructura combinatoria aparece en muchas aplicaciones de naturaleza

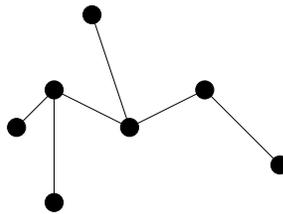


Figura 6.2: Árbol

distinta. Por ejemplo, en el diseño de algoritmos y estructuras de datos se utilizan los llamados *árboles de decisión* y, en particular, los *árboles binarios*, en los cuales existe un único vértice  $r$ , llamado raíz, que tiene grado 2 y los vértices restantes tienen grado 1 o 3. Así, en el árbol binario de la figura 6.3, los vértices  $v$  y  $w$  representan posibles alternativas a partir de  $u$ .

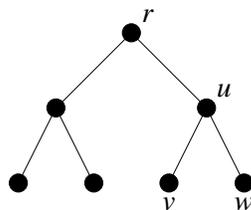


Figura 6.3: Árbol binario

El teorema siguiente da diversas caracterizaciones de los árboles. Si  $u, v$  son vértices independientes de un grafo  $G = (V, E)$ , representaremos por  $G + uv$  el grafo resultante de añadir a  $G$  la arista  $uv$ , es decir,  $G + uv = (V, E \cup \{uv\})$ .

**Teorema 6.1.** Dado un grafo  $G$ , las proposiciones siguientes son equivalentes:

- (a)  $G$  es un árbol.
- (b)  $G$  es conexo y no tiene ciclos.
- (c) Entre cada par de vértices de  $G$  existe un único camino.
- (d)  $G$  es conexo con orden  $n$  y tamaño  $n - 1$ .
- (e)  $G$  es conexo, pero  $G - e$  es no conexo para toda arista  $e \in E(G)$ .
- (f)  $G$  es acíclico, pero  $G + uv$  contiene un ciclo para todo par  $u, v$  de vértices independientes.

*Demostración.* (a)  $\iff$  (b). Esta equivalencia corresponde a la definición de árbol.

(b)  $\iff$  (c). Sea  $G$  un árbol. Si entre dos vértices dados de  $G$  hubiese dos caminos diferentes,  $C_1$  y  $C_2$ , entonces su unión  $C_1 \cup C_2$  sería un subgrafo de  $G$  que contendría al menos un ciclo. Recíprocamente, si entre cada par de vértices distintos de un grafo  $G$  hay un único camino,  $G$  es conexo y también tiene que ser acíclico; de otro modo, si  $\Gamma$  fuese un ciclo de  $G$ , existirían al menos dos caminos distintos entre cada par de vértices de  $\Gamma$ .

(a)  $\iff$  (d). Esta equivalencia se puede demostrar por inducción sobre el número de vértices. Si  $G$  es un árbol con  $n = 1$ ,  $n = 2$  o  $n = 3$  vértices, se cumple trivialmente que su número de aristas es  $n - 1$ ; ver la figura 6.4. Supongamos ahora que todo árbol de orden  $k$  menor que  $n$



Figura 6.4: Árboles de orden 1, 2 y 3

tiene tamaño  $k - 1$ . Sea  $G$  un árbol de orden  $n$  y sea  $e = uv \in E(G)$ . El camino  $u, v$  es el único en el árbol  $G$  entre los vértices  $u$  y  $v$ . Por tanto, el grafo  $G - e$  está constituido por dos componentes conexos  $T_u$  y  $T_v$  que, por ser  $G$  acíclico, tampoco contienen ciclos y que, por tanto, son árboles. Si  $T_u$  y  $T_v$  tienen orden  $n_u$  y  $n_v$ , respectivamente, entonces, por la hipótesis de inducción, sus tamaños son, respectivamente,  $n_u - 1$  y  $n_v - 1$ . Por tanto, el número de aristas de  $G$  es  $(n_u - 1) + (n_v - 1) + 1 = (n_u + n_v - 1) = n - 1$ . Así pues, (a)  $\implies$  (d). Para demostrar la implicación contraria, (d)  $\implies$  (a), es preciso notar, en primer lugar, que la hipótesis de que  $G$  sea conexo es necesaria, ya que la figura 6.5 muestra un ejemplo de grafo con  $|E(G)| = |V(G)| - 1$  que no es árbol. En segundo lugar, el teorema 1.1 del capítulo 7 implica que todo grafo con orden  $n$  y tamaño  $n - 1$ ,  $n > 1$ , tiene al menos dos vértices con grado 1 (ver el problema 1 al final del capítulo). Planteando ahora la hipótesis de inducción de que todo grafo conexo con menos de  $n$  vértices y tamaño una unidad menor que su orden es árbol (la hipótesis se cumple

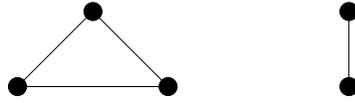


Figura 6.5: Grafo con  $|E(G)| = |V(G)| - 1$  que no es árbol

otra vez trivialmente para los primeros casos), sea  $G$  un grafo conexo con  $n$  vértices y  $n - 1$  aristas. Si  $u \in V(G)$  es uno de los vértices de  $G$  con grado 1, consideremos el grafo  $G - u$  que tiene orden  $n - 1$  y tamaño  $n - 2$ . Por la hipótesis de inducción,  $G - u$  es árbol y, por tanto,  $G$  tiene que ser también árbol.

(a)  $\iff$  (e). Sea  $G$  conexo. Si  $G$  tuviese ciclos y  $e$  fuese una arista perteneciente a algún ciclo de  $G$ , entonces  $G - e$  sería aún conexo. Por tanto,  $G$  no contiene ciclos y es un árbol. Recíprocamente, si  $G$  es árbol y  $e = uv \in E(G)$ , la arista  $e$  es el único camino entre sus vértices terminales  $u$  y  $v$ . Por tanto,  $G - e$  es no conexo. Notemos, entonces, que en un árbol cada arista es una arista puente.

(a)  $\iff$  (f). Sea  $G$  un árbol. Dados dos vértices independientes  $u, v$  de  $G$ , sea  $C$  el único camino en  $G$  entre estos dos vértices. En el grafo  $G + uv$ , la arista  $uv$  forma con  $C$  un ciclo. Así, (a)  $\implies$  (f). Recíprocamente, si  $G$  no contiene ciclos, pero para todo par de vértices independientes  $u, v$ , el grafo  $G + uv$  ya no es acíclico, entonces  $G$  debe ser conexo, de otro modo  $G + uv$  no tendría ningún ciclo si  $u$  y  $v$  son vértices que pertenecen a componentes distintos de  $G$ .  $\square$

Un grafo conexo de orden  $n$  debe tener al menos  $n - 1$  aristas. En este sentido, los árboles son los grafos conexos de tamaño más pequeño. Recordemos también que el hecho de que un grafo conexo sin ciclos de orden  $n$  tenga tamaño  $n - 1$  se usó en el capítulo anterior para demostrar la fórmula de Euler y sus consecuencias.

Cada arista de un árbol es un puente. En cuanto a los vértices, se tiene el resultado siguiente, la demostración del cual se deja como ejercicio.

**Teorema 6.2.** Un vértice  $v$  de un árbol  $T$  es vértice de corte si y sólo si  $d(v) > 1$ .

El concepto de árbol se puede generalizar de la forma siguiente. Un *bosque* es un grafo acíclico. Así, cada componente de un bosque es un árbol.

**Ejercicio 6.3.** Demostrar que si  $G$  es un bosque con orden  $n$  y  $k$  componentes, entonces  $G$  tiene  $n - k$  aristas.

## 6.2 Árboles generadores

Un *árbol generador* de un grafo  $G$  es un subgrafo generador de  $G$  que es árbol. Notemos que, si  $T$  es un árbol generador de  $G$ , entonces  $T$  es un árbol maximal contenido en  $G$  en el sentido siguiente: si  $e \in E(G)$  es una arista que no pertenece a  $E(T)$ , entonces  $T + e$  ya es un subgrafo de  $G$  que contiene un ciclo. La figura 6.6 muestra un grafo  $G$  y uno de sus árboles generadores.



Figura 6.6:  $T$  es un árbol generador de  $G$

**Teorema 6.4.** Todo grafo conexo tiene un árbol generador.

*Demostración.* Dado  $G = (V, E)$  conexo, sea  $u \in V$  un vértice cualquiera. Para cada  $v \in V$ ,  $v \neq u$ , escogemos un vértice  $w_v$  adyacente con  $v$  y tal que  $d(u, w_v) = d(u, v) - 1$  ( $w_v$  puede coincidir con  $u$ ). Sea  $E' \subset E$  el conjunto de aristas de la forma  $w_v v$  obtenido de esta manera. Entonces, el subgrafo  $T = (V, E')$  es árbol generador de  $G$ . En efecto, por construcción existe en  $T$  un camino entre  $u$  y cualquier otro vértice  $v$ . Así,  $T$  es un subgrafo conexo. Por otra parte, si  $T$  tuviese un ciclo  $\Gamma$  y  $w$  fuese un vértice de  $\Gamma$  tal que la distancia  $d(u, w)$  fuese máxima, entonces el vértice  $w$  sólo podría ser adyacente hacia otro vértice del ciclo, cosa que contradice el hecho de que en un ciclo cada vértice es adyacente hacia otros dos.  $\square$

A partir de esta demostración resulta sencillo formular un algoritmo para obtener un árbol generador de un grafo conexo. Además, el árbol generador  $T$  obtenido tiene la propiedad de preservar las distancias desde el vértice  $u$ . Es decir,  $d_G(u, v) = d_T(u, v)$ , para todo  $v \in V(G)$ . En la figura 6.7 se muestra un árbol generador del grafo  $G$  de la figura 6.6, obtenido con el procedimiento descrito. Cada vértice de  $G$  se ha etiquetado con su distancia al vértice  $u$  indicado en la figura.

En la sección 6.5 se presentan, en un contexto más general que el considerado aquí, dos algoritmos clásicos de obtención de árboles generadores.

Si  $T$  es un árbol generador, se llaman *cuerdas* las aristas de  $G$  que no son aristas de  $T$ . Así, si  $c$  es una cuerda, el subgrafo  $T + c = (V(G), E(T) \cup \{c\})$  contiene exactamente un ciclo. Por

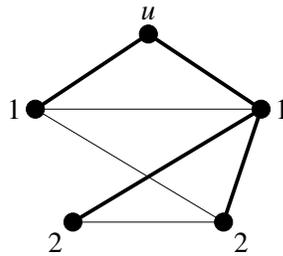


Figura 6.7: Obtención de un árbol generador

ejemplo, si  $G$  y  $T$  son los indicados en la figura 6.6, la figura 6.8 muestra el ciclo  $\Gamma_c$  creado por la cuerda  $c$ . Esta propiedad será ampliamente usada en el próximo capítulo, cuando se estudie la estructura de ciclos fundamentales de un grafo.

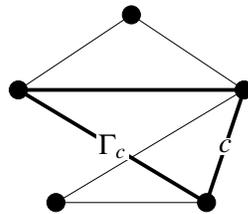


Figura 6.8: Ciclo creado por la cuerda  $c$

### 6.3 Número de árboles generadores

Como se ha visto en el capítulo anterior, una posible representación matricial de un grafo conexo  $G$  no trivial se obtiene considerando su matriz de incidencia  $B$ . Las filas de  $B$  corresponden a los vértices del grafo y cada columna, que contiene exactamente dos unos, corresponde a una arista de  $G$ . Así, la información de la estructura de  $G$  queda también recogida en la llamada *matriz de incidencia reducida*,  $B_r$ , obtenida de  $B$  suprimiendo la fila correspondiente a un vértice dado  $v_r$ , que se puede tomar como vértice de referencia.

*Ejemplo:* El grafo  $G$  de la figura 6.9, con  $V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$  y conjunto de aristas  $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ , donde  $e_1 = 12$ ,  $e_2 = 13$ ,  $e_3 = 14$ ,  $e_4 = 34$ , tiene como matriz de incidencia  $B$  y

matriz de incidencia reducida  $B_r$ ,

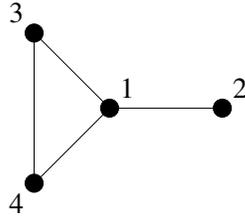


Figura 6.9: Obtención de  $B_r$ .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donde se ha tomado como vértice  $v_r$  el vértice 1.

**Ejercicio 6.5.** Reconstruir el grafo del ejemplo anterior a partir de la matriz de incidencia reducida  $B_r$ .

Ahora, sea  $M$  una matriz obtenida de  $B_r$  cambiando, en cada columna de  $B_r$ , una de las entradas igual a 1 por  $-1$ . Además, si  $G$  tiene orden  $n$  y  $H$  es un subgrafo con  $n - 1$  aristas, designaremos por  $M_H$  la submatriz de  $M$ , cuadrada de orden  $n - 1$ , las columnas de la cual corresponden a las aristas de  $H$ .

**Ejercicio 6.6.** Comprobar que la matriz  $M$  es la matriz de incidencia reducida de la matriz de incidencia de un digrafo obtenido de  $G$  orientando las aristas del grafo.

El resultado siguiente relaciona la estructura de  $H$  con el determinante de  $M_H$ .

**Teorema 6.7.** El subgrafo  $T$  es árbol generador de  $G$  si y sólo si  $|\det(M_T)| = 1$ .

*Demostración.* Sea  $T$  un árbol generador de  $G$ , sea  $u_1 \neq v_r$  un vértice de  $G$  que tenga grado uno en  $T$  y denotemos por  $b_1$  la arista de  $T$  con la cual este vértice incide. En general, sea  $u_i$ ,  $i = 2, \dots, n - 1$ , un vértice diferente de  $v_r$  que tenga grado uno en el árbol  $T - \{u_1, \dots, u_{i-1}\}$  y  $b_i$  la arista de este árbol con la cual  $u_i$  es incidente. Ahora, permutando adecuadamente las filas y las columnas de  $M_T$ , es posible obtener una matriz  $M'_T$  tal que  $|(M'_T)_{ij}| = 1$  si  $u_i$  es incidente con  $b_j$  y  $(M'_T)_{ij} = 0$  de otro modo. Pero, por construcción,  $M'_T$  es triangular inferior con  $|(M'_T)_{ii}| = 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ . Por tanto,  $|\det(M'_T)| = |\det(M_T)| = 1$ .

En cambio, si  $H$  es un subgrafo generador de  $G$  no conexo y con  $n - 1$  aristas, la suma de las filas de  $M_H$  correspondientes a los vértices de un componente de  $H$  que no contenga el vértice  $v_r$  da el vector 0, ya que en cada columna sumamos 1 y  $-1$ . Por tanto,  $\det(M_T) = 0$ .

Finalmente, si  $H$  no es subgrafo generador de  $G$  y no contiene  $v_r$ , entonces la suma de las filas de  $M_H$  da nuevamente el vector 0. Si  $H$  no es subgrafo generador y contiene  $v_r$ , entonces alguna de las filas de  $M_H$  es el vector 0. En cualquier caso,  $\det(M_T) = 0$ .  $\square$

**Ejercicio 6.8.** Construir las matrices  $M_H$  de los subgrafos generadores del grafo de la figura 6.9.

El resultado anterior permite, ahora, contar el número de árboles generadores de un grafo conexo no trivial.

**Teorema 6.9.** El número  $\tau(G)$  de árboles generadores de un grafo conexo  $G$  no trivial es

$$\tau(G) = \det(MM^T)$$

*Demostración.* Se usará un resultado clásico de álgebra de determinantes, conocido como *teorema de Binet–Cauchy*: Si  $P$  y  $Q$  son matrices  $r \times s$  y  $s \times r$ , respectivamente, con  $r \leq s$ , y  $P_i$  y  $Q_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, \binom{s}{r}$ , son, respectivamente, las submatrices cuadradas  $r \times r$  de  $P$  y  $Q$  de tal forma que, si  $P_i$  contiene las columnas  $n_{i_1}, n_{i_2}, \dots, n_{i_r}$  de  $P$ , entonces  $Q_i$  contiene las filas correspondientes  $n_{i_1}, n_{i_2}, \dots, n_{i_r}$  de  $Q$ , se cumple la fórmula  $\det(PQ) = \sum_i \det(P_i)\det(Q_i)$ .

Aplicando este resultado,

$$\det(MM^T) = \sum_i \det(M_i)\det(M_i^T) = \sum_i (\det(M_i))^2$$

donde cada  $M_i$  corresponde a un subgrafo con  $n - 1$  aristas. Sin embargo,  $(\det(M_i))^2 = 1$  si y sólo si las columnas de  $M_i$  definen un árbol generador de  $G$  y  $(\det(M_i))^2 = 0$ , de otro modo. Por tanto,  $\det(MM^T)$  cuenta el número total de árboles generadores.  $\square$

*Ejemplo:* Consideremos el grafo de la figura 6.6 con los vértices numerados como se indica en la figura 6.10 y las aristas ordenadas de la forma siguiente:  $e_1 = 12$ ,  $e_2 = 13$ ,  $e_3 = 23$ ,  $e_4 = 25$ ,  $e_5 = 34$ ,  $e_6 = 35$ ,  $e_7 = 45$ . Tomando como vértice de referencia  $v_r = 5$ , una posible matriz  $M$  es la siguiente:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

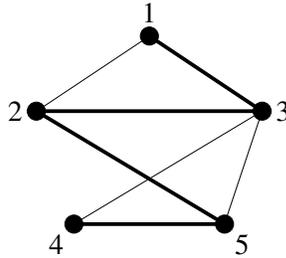


Figura 6.10: Árboles generadores y matriz de incidencia

Por ejemplo, al árbol generador definido por el conjunto de aristas  $\{e_2, e_3, e_4, e_7\}$  corresponde la submatriz cuadrada de orden 4,

$$M_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que tiene determinante 1. Sin embargo, al subgrafo  $H$  definido por el conjunto de aristas  $\{e_1, e_2, e_3, e_7\}$ , corresponde la submatriz

$$M_H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

con determinante nulo.

El número de árboles generadores de  $G$  es  $\det(MM^T) = 21$ .

Tomando  $G = K_n$ , se obtiene el siguiente corolario del teorema anterior, conocido como *fórmula de Cayley*, la demostración del cual se deja como ejercicio.

**Corolario 6.10.** El número de árboles de orden  $n$ ,  $n \geq 2$ , es  $n^{n-2}$ .

En este resultado, los vértices de los árboles están numerados y dos árboles se consideran distintos cuando no son idénticos, aunque sean isomorfos.

Dado un grafo conexo no trivial  $G = (V, E)$  y  $e = uv \in E$ , denotamos por  $G_e$  el multigrafo resultante de “contraer” la arista  $e$ , es decir,  $G_e$  se obtiene suprimiendo de  $G$  la arista  $e$  e identificando sus vértices terminales  $u, v$ ; ver la figura 6.11. Un árbol generador de un multigrafo es, como en el caso de un grafo, un subgrafo que es árbol y contiene todos los vértices. El número  $\tau(G)$  de árboles generadores de  $G$  verifica la siguiente fórmula recursiva:

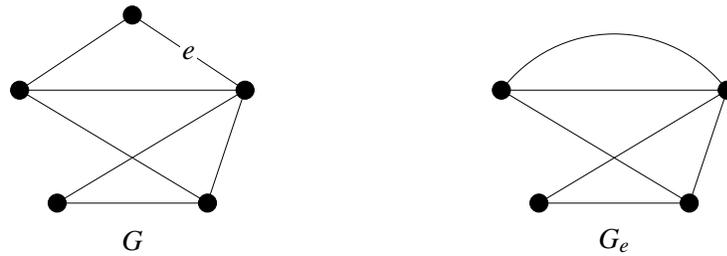


Figura 6.11: Contracción de una arista

**Teorema 6.11.** Dada  $e \in E(G)$ , se cumple  $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G_e)$ .

*Demostración.* Sólo es preciso notar que los árboles generadores de  $G$  que no contienen la arista  $e$  se corresponden con los árboles generadores de  $G - e$ , mientras que los que sí contienen la arista  $e$  se corresponden con los árboles generadores de  $G_e$ .  $\square$

**Ejercicio 6.12.** Calcular el número de árboles generadores del multigrafo  $G_e$  de la figura 6.11.

## 6.4 Obtención de todos los árboles generadores

Sean  $T$  y  $T'$  dos árboles generadores de un grafo conexo no trivial  $G$ . Sea  $F$  el conjunto de aristas de  $T$  que son cuerdas respecto a  $T'$ , y  $F'$  el conjunto de aristas de  $T'$  que son cuerdas respecto a  $T$ . Es decir,  $F = E(T) \setminus E(T')$  y  $F' = E(T') \setminus E(T)$ . Dada  $f \in F$ , alguna de las aristas que constituyen el único ciclo  $\Gamma_f$  de  $T' + f$  debe pertenecer a  $F'$ , de otro modo  $T$  no sería acíclico. Sea  $F_\gamma$  el conjunto de estas aristas de  $\Gamma_f$  que también pertenecen a  $F'$ . Alguna  $f' \in F_\gamma$  debe ser tal que  $f$  pertenezca también al único ciclo  $\Gamma_{f'}$  de  $T + f'$ ; de otro modo, la unión de los ciclos  $\Gamma_f$  y  $\Gamma_{f'}$ ,  $f' \in F_\gamma$ , tendría un ciclo constituido únicamente por aristas de  $T$ .

Si ahora se considera el árbol  $T_1 = (T + f') - f$ , el número de aristas comunes a  $T_1$  y  $T'$  es una unidad más grande que el de aristas comunes a  $T$  y  $T'$ . Si decimos que  $T_1$  se ha obtenido de  $T$  mediante una *transformación elemental*, iterando el proceso descrito se obtiene el resultado siguiente:

**Teorema 6.13.** A partir de un árbol generador  $T$  se obtiene cualquier otro árbol generador  $T'$  mediante una sucesión de  $k$  transformaciones elementales, siendo  $k$  el número de aristas de  $T'$  que son cuerdas en  $T$ .

**Ejercicio 6.14.** Sean  $T$  y  $T'$  los árboles generadores indicados en las figuras 6.6 y 6.7 respectivamente. Obtener uno del otro mediante transformaciones elementales.

## 6.5 Árboles generadores de coste mínimo

Una *función de coste* definida sobre el conjunto de aristas de un grafo conexo no trivial  $G = (V, E)$  es una aplicación  $c$  que asigna a cada arista  $e \in E$  un número real no negativo  $c(e)$ . Si  $T$  es un árbol generador de  $G$  se define su coste,  $c(T)$ , mediante la fórmula:

$$c(T) = \sum_{e \in E(T)} c(e)$$

En muchas aplicaciones surge la cuestión de determinar un árbol generador  $T_m$  que tenga coste mínimo. Por ejemplo, si  $c(e)$ ,  $e = uv$ , representa el coste de conectar directamente los nodos  $u$  y  $v$  de una red, y se trata de determinar la red más económica, entonces la solución corresponderá a encontrar el árbol generador de coste mínimo del grafo completo determinado por los nodos (¿por qué?). Este es un problema clásico conocido como el *problema del conector*.

Dos algoritmos clásicos para determinar un árbol generador de coste mínimo  $T_m$  de un grafo  $G = (V, E)$  son los siguientes:

**Entrada:**  $G = (V, E)$ : un grafo conexo.

**Algoritmo KRUSKAL**

1.  $F_0 \leftarrow \emptyset$ .
2. **Para**  $k = 1$  **hasta**  $|V| - 1$  **hacer**  
 $F_k \leftarrow F_{k-1} \cup \{b_k\}$ , donde  $b_k$  es una arista de coste mínimo entre las aristas  $e$  de  $E \setminus F_{k-1}$  tales que el subgrafo  $H = (V, F_{k-1} \cup \{e\})$  es acíclico.
3.  $T_m = (V, F_{|V|-1})$ .

**Salida:**  $T_m$ : árbol generador de coste mínimo.

**Entrada:**  $G = (V, E)$ : un grafo conexo.

**Algoritmo PRIM**

1. Escoger un vértice  $v_0 \in V$ .  
 Sea  $V_0 = \{v_0\}$  y  $T_0$  el árbol constituido por este único vértice.
2. **Para**  $k = 1$  **hasta**  $|V| - 1$  **hacer**  
 Sea  $v_k \in V \setminus V_{k-1}$  adyacente con algún vértice  $w \in V_{k-1}$  y tal que la arista  $e = v_k w$  tenga coste mínimo entre todas las que no pertenecen a  $E(T_{k-1})$  y son incidentes con algún vértice de  $T_{k-1}$ .  
 $V_k \leftarrow V_{k-1} \cup \{v_k\}$

$$T_k \leftarrow T_{k-1} + e$$

$$3. T_m = T_{|V|-1}.$$

**Salida:**  $T_m$ : árbol generador de coste mínimo.

**Teorema 6.15.** Los algoritmos de Kruskal y de Prim determinan un árbol generador de coste mínimo.

Antes de demostrar el teorema anterior, consideremos un resultado útil a la hora de decidir si un árbol generador  $T$  tiene coste mínimo. Designamos por  $\mathcal{C}(T)$  el conjunto de árboles generadores que se obtienen de  $T$  mediante una transformación elemental. Es decir,  $T' = (T + c) - e$ , donde  $c$  es una cuerda respecto a  $T$  y  $e$  es una arista de  $T$  que pertenece al único ciclo  $\Gamma_c$  de  $T + c$ .

**Lema 6.16.**  $T$  es un árbol generador de coste mínimo si y sólo si  $c(T') \geq c(T)$  para todo  $T' \in \mathcal{C}(T)$ .

*Demostración.* La condición es evidentemente necesaria. Para demostrar la suficiencia sea  $T$  un árbol generador que verifique la condición enunciada y sea  $T_m$  un árbol generador de coste mínimo. Sea  $F$  el conjunto de aristas de  $T$  que son cuerdas respecto a  $T_m$  y  $F_m$  el conjunto de aristas de  $T_m$  que son cuerdas respecto a  $T$ . Dada  $f \in F$ , sea  $h \in F_m$  una arista del único ciclo  $\Gamma_f$  de  $T_m + f$  tal que  $f$  pertenece también al único ciclo  $\Gamma_h$  de  $T + h$ . Consideremos el árbol generador  $T' = (T + h) - f$ . Dado que  $T' \in \mathcal{C}(T)$ , se tiene  $c(T') \geq c(T)$  y, por tanto,  $c(h) \geq c(f)$ . Por otra parte, si consideramos el árbol generador  $T'_m = (T_m + f) - h \in \mathcal{C}(T_m)$ , obtenemos también  $c(f) \geq c(h)$ . Así,  $c(f) = c(h)$  y, por tanto,  $c(T') = c(T)$ . Por otra parte,  $T'$  tiene con  $T_m$  una arista común más que  $T$ .

Vemos ahora que  $T'$  satisface también la condición  $c(T'') \geq c(T')$  para todo  $T'' \in \mathcal{C}(T')$ . Supongamos que exista un árbol generador  $T'' = (T' + h') - f' \in \mathcal{C}(T')$  tal que  $c(T'') < c(T')$ , donde  $h'$  es una cuerda respecto a  $T'$  y  $f'$  es una arista de  $T'$ . Si el único ciclo  $\Gamma_{h'}$  de  $T' + h'$  no contiene a  $h$ , entonces  $\Gamma_{h'}$  es también el único ciclo de  $T + h'$ , y  $(T + h') - f' \in \mathcal{C}(T)$  tendría un coste menor que  $T$ . De otro modo, si el ciclo  $\Gamma_{h'}$  contiene también la arista  $h$ , entonces la unión de  $\Gamma_{h'}$  y  $\Gamma_h$  (el único ciclo de  $T + h$ ) contiene el único ciclo  $\Gamma'_{h'}$  que resulta añadiendo la cuerda  $h'$  al árbol  $T$ . Además,  $f'$  debe pertenecer también a  $\Gamma'_{h'}$  y, otra vez,  $(T + h') - f'$  tendría coste menor que  $T$ .

Dado que  $T'$  satisface también la condición del enunciado, podemos iterar el proceso y obtener una sucesión de árboles generadores  $T, T', \dots, T_m$ , todos ellos con el mismo coste, que acaba en  $T_m$ . Así,  $c(T) = c(T_m)$  y  $T$  tiene coste mínimo.  $\square$

*Demostración del teorema 6.15.* (a) Consideremos en primer lugar el algoritmo de Kruskal. El subgrafo  $T_m$  que se obtiene es un árbol generador. En efecto,  $T_m$  tiene  $n - 1$  aristas y, por construcción, es acíclico. Veamos que también es conexo. Sean  $T_1, T_2, \dots, T_r$  los componentes conexos de  $T_m$ , que son por tanto árboles. Así,

$$n - 1 = |E(T)| = \sum_{i=1}^r (|V(T_i)| - 1) = \sum_{i=1}^r |V(T_i)| - r = n - r$$

de donde se concluye  $r = 1$ . Si existiese  $T' = (T_m + h) - f \in \mathcal{C}(T_m)$  con  $c(T') < c(T_m)$ , esto implicaría  $c(h) < c(f)$  y, por tanto, cuando en el paso (2) del algoritmo se ha seleccionado la arista  $f$ , sería preciso haber seleccionado antes la arista  $h$ . Por tanto,  $T_m$  verifica la condición suficiente expresada en el lema 6.16 y  $T_m$  tiene coste mínimo.

(b) Por construcción, la sucesión  $T_0, T_1, \dots, T_{n-1} = T_m$  obtenida aplicando el algoritmo de Prim es una sucesión de subgrafos que son árboles, con órdenes  $1, 2, \dots, n$ , respectivamente, que acaba, por tanto, en un árbol generador. Supongamos otra vez que exista  $T' = (T_m + h) - f \in \mathcal{C}(T_m)$  tal que  $c(T') < c(T_m)$  y, por tanto,  $c(h) < c(f)$ . Designemos por  $\Gamma_h$  el único ciclo de  $T_m$  que contiene a  $f$  y  $h$  y sea  $T_k$  el árbol de la sucesión anterior tal que  $T_k = T_{k-1} + f$ . Sea  $f_1 \neq f$  la otra arista de  $\Gamma_h$ , que no pertenece a  $E(T_{k-1})$ , incidente con un vértice de  $T_{k-1}$ . Por el proceso de obtención de  $T_k$  a partir de  $T_{k-1}$  se debe cumplir  $c(f_1) \geq c(f)$ . Sea ahora  $T_{k_1}$ ,  $k_1 > k$ , el árbol de la sucesión construida por el algoritmo de la forma  $T_{k_1} = T_{k_1-1} + f_1$ , creado al añadir la arista  $f_1$ . Si  $f_2 \neq f_1$  es la otra arista de  $\Gamma_h$  incidente con vértices de  $T_{k_1-1}$ , se tiene  $c(f_2) \geq c(f_1)$ . Repitiendo el razonamiento, obtendremos finalmente una arista  $f_s$  de  $\Gamma_h$ , con  $c(f_s) \geq \dots \geq c(f_2) \geq c(f_1)$  y tal que  $f_s$  y  $h$  son incidentes con vértices de  $T_{k_s-1}$ . Por tanto,  $c(h) \geq c(f_s)$ , con lo que se concluye también que  $c(h) \geq c(f)$ , en contradicción con  $c(h) < c(f)$ . Así, también en este caso,  $T_m$  verifica la condición suficiente expresada en el lema 6.16 y tiene, por tanto, coste mínimo.  $\square$

Las figuras 6.12 y 6.13 muestran secuencias de subgrafos obtenidos a partir del grafo  $G$  de la figura 6.6, con los costes que se indican, cuando se aplican los algoritmos de Kruskal y Prim respectivamente. Notemos que, tal como se ha dicho en la demostración del teorema 6.15, los subgrafos generados por el algoritmo de Prim son árboles, mientras que, en general, esto no es así en caso de aplicar el algoritmo de Kruskal.

## Notas bibliográficas

Los libros de Bondy y Murty [1] y de Chartrand y Lesniak [3] cubren de forma excelente la temática del capítulo. El libro de Harary [4] contiene un apéndice con los diagramas de todos los árboles de orden menor o igual a 10. La aplicación de los árboles a las ciencias de la computación puede estudiarse en el libro de Knuth [5]. El resultado sobre el número de

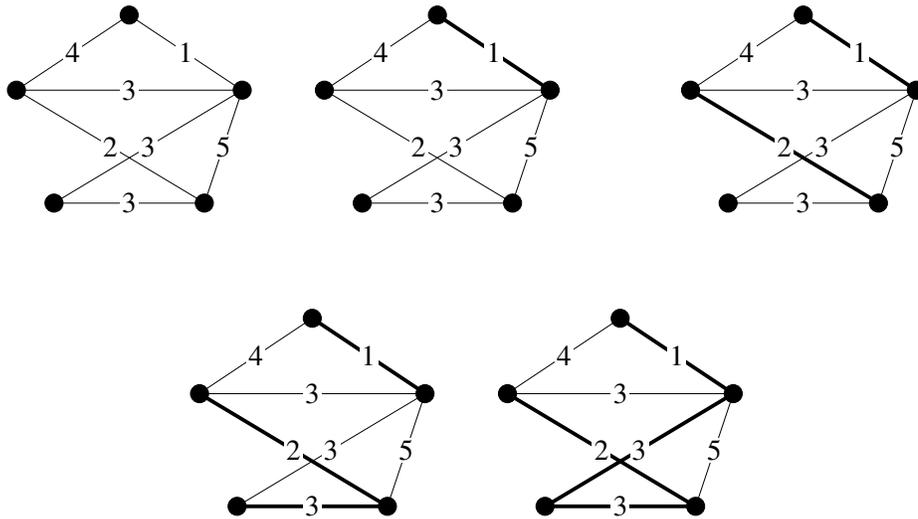


Figura 6.12: Desarrollo del algoritmo de Kruskal

árboles generadores no idénticos se debe a Cayley [2], y en [7] hay una recopilación de diversas demostraciones del teorema. En cuanto a los árboles generadores, el algoritmo de Kruskal fue descrito en [6] y la referencia para el algoritmo de Prim es [8].

## Bibliografía

- [1] J. A. Bondy, U. S. R. Murty. *Graph Theory with Applications*, North Holland, 1976.
- [2] A. Cayley. "A theorem on trees", *Quart. J. Math.*, **23**, pp. 376–378, 1889.
- [3] G. Chartrand, L. Lesniak. *Graphs and Digraphs*, Wadsworth & Brooks, 1986.
- [4] F. Harary. *Graph Theory*, Addison Wesley, 1972.
- [5] D. E. Knuth. *The Art of Computing Programming*, vol. 1, Addison Wesley, 1968.
- [6] J. B. Kruskal. "On the shortest spanning tree of a graph and the traveling salesman problem", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **7**, pp. 48–50, 1956 .
- [7] J. W. Moon. "Various proofs of Cayley's formula for counting trees", *A Seminar on Graph Theory*, Holt, Rinehart and Winston, pp. 70–78, 1967.

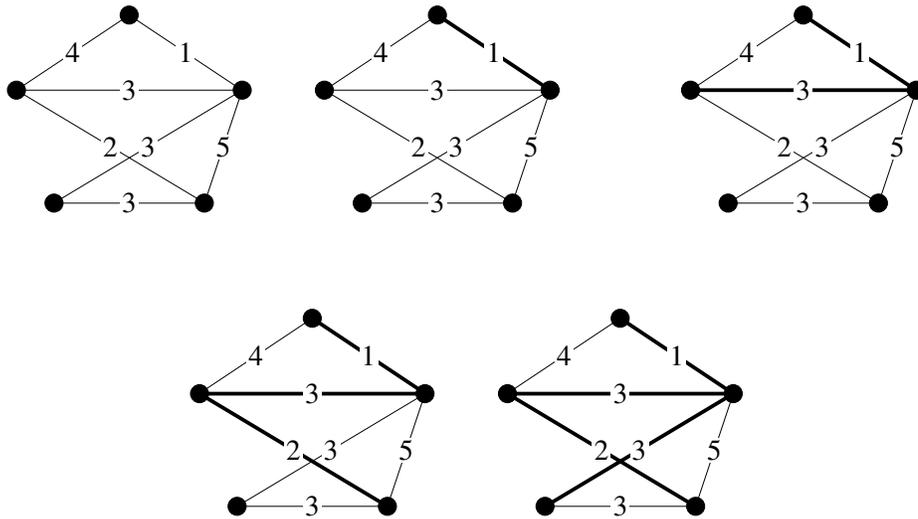


Figura 6.13: Desarrollo del algoritmo de Prim

- [8] R. C. Prim. “Shortest connection network and some generalizations”, *Bell System Tech. J.*, **36**, pp. 1389–1401, 1957.

## Problemas

1. Demostrar que en todo grafo con  $n$  vértices y  $n - 1$  aristas existen al menos dos vértices de grado 1.
2. Demostrar que un árbol es un grafo bipartito.
3. Determinar todos los árboles de orden 4. Cuántos hay que sean no isomorfos?
4. Demostrar el teorema 6.2: Un vértice  $v$  de un árbol  $T$  es vértice de corte si y sólo si  $d(v) > 1$ .
5. Sea  $T$  un árbol con  $n$  vértices y sea  $G$  un grafo con grado mínimo  $\delta(G) \geq n - 1$ . Demostrar que  $T$  es subgrafo de  $G$  (es decir, existe un subgrafo de  $G$  isomorfo a  $T$ ).
6. Recordemos que el centro de un grafo  $G$  es el conjunto de vértices de  $G$  que tienen excentricidad mínima. Demostrar que el centro de un árbol está formado por un único vértice o por dos vértices adyacentes.

7. Sean  $r$  y  $D$  el radio y el diámetro de un árbol  $T$ . Demostrar que  $D$  es igual a  $2r$  o a  $2r - 1$ . Relacionar este resultado con el del problema 6.
8. Sea  $T$  un árbol binario con orden  $n$ .
- Demostrar que  $n$  es impar;
  - demostrar que el número de vértices de grado 1 es  $(n + 1)/2$ .
9. Sea  $r$  el vértice raíz de un árbol binario  $T$  con orden  $n$ . Se dice que  $v \in V(T)$  está en el nivel  $i$  si  $d(r, v) = i$ . Sea  $l_m$  el nivel máximo. Demostrar que

$$\lceil \log_2(n + 1) - 1 \rceil \leq l_m \leq \frac{n - 1}{2}$$

10. Demostrar que un subgrafo  $H$  de un grafo conexo  $G$  es subgrafo de un árbol generador de  $G$  si y sólo si  $H$  es acíclico.
11. Demostrar la fórmula de Cayley (corolario 6.10) aplicando el teorema 6.9 al grafo completo  $K_n$ .

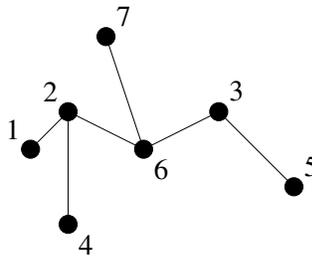


Figura 6.14: Secuencia asociada a  $T$

12. Sea  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $n > 2$ , y  $T$  un árbol con conjunto de vértices  $V$ . Asociemos a  $T$  una secuencia  $(t_1, t_2, \dots, t_{n-2})$  de longitud  $n - 2$  (llamada *secuencia de Prüfer*) construida con elementos de  $V$  mediante el procedimiento siguiente. Suponiendo  $V$  ordenado, sea  $v_1$  el primer vértice de grado uno en  $T$  y sea  $t_1$  el vértice adyacente a  $v_1$ . Sea ahora  $v_2$  el primer vértice de grado uno en  $T - v_1$  y sea  $t_2$  el vértice adyacente en  $T - v_1$  a  $v_2$ . Esta operación se repite hasta que  $t_{n-2}$  ha quedado definido y sólo quedan dos vértices.
- Dar la secuencia correspondiente al árbol de la figura 6.14.
  - Dar el árbol que tiene asociada la secuencia  $(4, 4, 3, 1, 1)$ .
  - Sea  $T_n$  el conjunto de árboles de orden  $n$ ,  $n > 2$ , con conjunto de vértices  $V$ . Demostrar que el procedimiento descrito define una correspondencia biyectiva entre  $T_n$  y  $V^{n-2}$ .

(d) Utilizando este hecho, demostrar el resultado dado en el corolario 6.10.

13. Una *arborescencia*  $A$  con raíz  $r$  es un digrafo tal que el grafo resultante de quitar las direcciones de los arcos es un árbol y con la propiedad de que existe un único camino dirigido desde  $r$  hacia cualquier otro vértice de  $A$ ; ver la figura 6.15. Demostrar que el número de arborescencias con  $n$  vértices etiquetados es  $n^{n-1}$ .

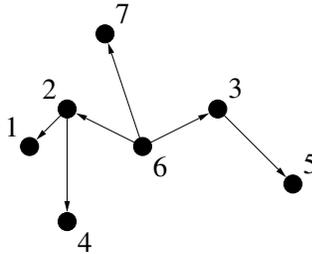


Figura 6.15: Arborescencia con raíz  $r = 6$

14. Usando la fórmula recursiva dada en el teorema 6.11, calcular el número de árboles generadores del grafo de la figura 6.10.
15. Sea  $M$  la matriz obtenida a partir de la matriz de incidencia reducida  $B_r$ , tal como se explica en la sección 6.3. Demostrar que si  $G$  es un grafo conexo con  $n$  vértices,  $n \geq 2$ , entonces el rango de  $M$  es  $n - 1$ .
16. La matriz de grados de un grafo  $G$  con conjunto de vértices  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es la matriz diagonal  $\text{diag}(d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n))$ . Demostrar la siguiente versión del teorema 6.9: Si  $G$  es un grafo conexo no trivial con matriz de adyacencia  $A$  y matriz de grados  $C$ , entonces el número de árboles generadores de  $G$  es el valor de un cofactor cualquiera de la matriz  $C - A$ .
17. Dado un un grafo conexo  $G$ , considerar el algoritmo siguiente:
- Si  $G$  no tiene ciclos, entonces  $T = G$ . Fin.
  - De otro modo, sea  $\Gamma$  un ciclo de  $G$  y  $e \in E(\Gamma)$  tal que  $G' = G - e$  sea conexo. Tomar  $G = G'$  y volver al paso anterior.

Demostrar que este procedimiento está bien definido y da un árbol generador de  $G$ .  
¿Cuántas iteraciones se requieren para obtener el árbol generador?

18. Sea  $F$  el conjunto de cuerdas de un grafo conexo  $G$  respecto de un cierto árbol generador. Demostrar que si  $\Gamma$  es un ciclo de  $G$ , entonces alguna arista de  $\Gamma$  pertenece a  $F$ .

19. Sea  $G$  un grafo conexo no trivial con una función de coste  $c$  definida sobre su conjunto de aristas tal que  $c(e) \neq c(f)$  si  $e$  y  $f$  son aristas distintas. Demostrar que, en este caso, el árbol generador de coste mínimo es único.
20. Considerar un grafo conexo no trivial con una función de coste definida sobre su conjunto de aristas. Suponer que existe una arista  $e$  cuyo coste es menor que el de cualquier otra arista. Demostrar que todo árbol generador de coste mínimo contiene la arista  $e$ .
21. Sea  $G$  un grafo conexo con orden  $n$  y tamaño  $m$ . Consideremos el grafo  $T_G$  que tiene por vértices los árboles generadores de  $G$ , y dos árboles son adyacentes en  $T_G$  si se obtienen uno del otro por una transformación elemental.
- (a) Demostrar que  $T_G$  es conexo;
- (b) demostrar que  $D(T_G) \leq \min(n-1, m-n+1)$ ;
- (c) determinar  $T_G$  si  $G = K_4$ .
22. La tabla siguiente da los costes de las conexiones entre diferentes nodos.

	A	B	C	D	E	F
A	–	5	6	4	3	7
B	5	–	2	4	8	5
C	6	2	–	4	8	8
D	4	4	4	–	2	5
E	3	8	8	2	–	4
F	7	5	8	5	4	–

Determinar una red más económica que permita la comunicación entre dos nodos cualesquiera usando: (a) el algoritmo de Kruskal; (b) el algoritmo de Prim.

## Capítulo 7

# Circuitos y ciclos

1. Grafos eulerianos
2. Grafos hamiltonianos
3. Ciclos fundamentales
4. Análisis de redes eléctricas

Este capítulo se dedica a analizar la estructura cíclica de los grafos desde dos puntos de vista. Primero, dado un grafo  $G$ , se estudia la existencia en  $G$  de circuitos y ciclos particularmente interesantes: los circuitos eulerianos y los ciclos hamiltonianos. Veremos que, aunque los problemas de encontrar circuitos y ciclos de este tipo se formulan de manera muy similar, tienen, en cambio, soluciones bien diferentes. Como aplicaciones, se consideran el conocido problema del viajante y el de las secuencias de de Bruijn. En segundo lugar, se ve como todos los ciclos de  $G$  se obtienen a partir de los llamados ciclos fundamentales respecto de un árbol generador del grafo. Como aplicación, se presentan las ideas básicas del análisis por ciclos de una red eléctrica  $RLC$ .

### 7.1 Grafos eulerianos

El origen de la teoría de grafos se asocia a menudo con la resolución que dio Euler del llamado problema de los puentes de Königsberg (1736). Esta antigua ciudad prusiana, dividida por el río Pregel, que bordea la isla de Kneiphof, tenía siete puentes dispuestos como indica la figura 7.1. Los habitantes de esta ciudad se planteaban la cuestión siguiente: ¿es posible, paseando, hacer un recorrido que pase una única vez por cada uno de los siete puentes? La resolución que dio Euler de este problema no solamente respondía a esta cuestión, sino que introducía la noción de grafo y resolvía al mismo tiempo un problema de carácter más general.

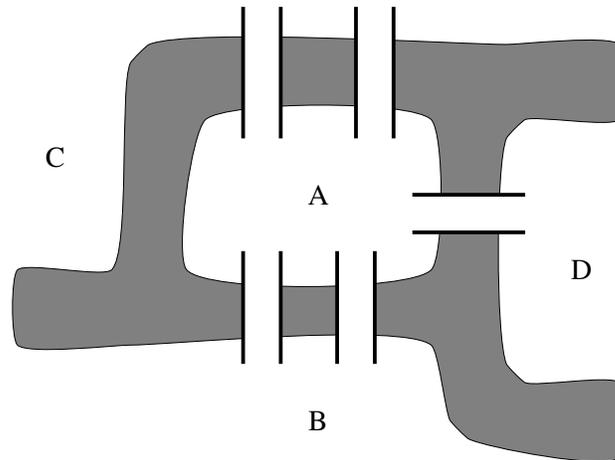


Figura 7.1: Los siete puentes de la ciudad de Königsberg

Dado un grafo (multigrafo)  $G$ , se dice que un *circuito* en  $G$  es *euleriano* si usa una única vez cada una de sus aristas. En el caso que un circuito así exista, se dice que el *multigrafo*  $G$  es *euleriano*. De forma similar, un recorrido que pasa una única vez por cada una de las aristas de  $G$  es un *recorrido euleriano*. En la figura 7.2, el grafo (a) no contiene ningún recorrido ni circuito euleriano, el grafo (b) contiene recorridos pero no circuitos eulerianos y el grafo (c) contiene circuitos eulerianos. La solución del problema de los puentes de Königsberg es

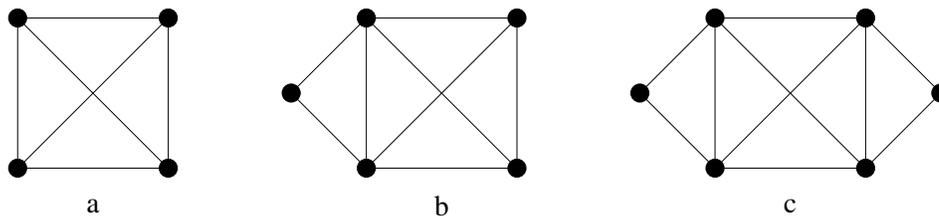


Figura 7.2: Grafos con y sin recorridos o circuitos eulerianos

equivalente a determinar si el multigrafo de la figura 7.3, obtenido asociando a cada región un vértice y a cada puente una arista, contiene o no un recorrido euleriano. Está claro que si un multigrafo es euleriano tiene que ser conexo, salvo vértices aislados. Por otra parte, no es difícil observar que, en un grafo euleriano, todos los vértices tienen que tener grado par. De hecho, estas dos condiciones son también suficientes para la existencia de circuitos eulerianos.

**Teorema 7.1.** Un multigrafo  $G$  es euleriano si y sólo si es conexo (salvo vértices aislados) y

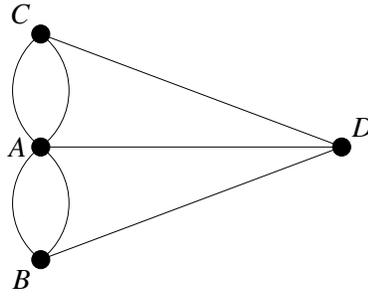


Figura 7.3: El grafo del problema de los puentes de Königsberg

todos sus vértices tienen grado par.

*Demostración.* Está claro que la existencia de vértices aislados no afecta la propiedad de ser euleriano. Por tanto, podemos suponer que  $G$  no tiene vértices aislados.

*Necesidad.* Si  $G$  tiene un circuito euleriano, este circuito conecta todos los vértices y  $G$  es conexo. Al recorrer el circuito, cada vez que entremos en un vértice por una determinada arista tenemos que salir por una arista diferente, de manera que cada vértice tiene que tener un número par de aristas incidentes.

*Suficiencia.* Supongamos ahora que  $G$  es conexo y que todos sus vértices tienen grado par. Construimos un recorrido a partir de un vértice arbitrario  $v_0$  sin usar la misma arista dos veces. Si llegamos a un vértice  $x \neq v_0$  habremos usado un número impar de aristas incidentes a  $x$ , de manera que podemos salir de  $x$  por una nueva arista. Cuando esto ya no sea posible, estaremos forzosamente en el vértice de salida  $v_0$  y habremos descrito un circuito  $C_0$ .

Si  $C_0$  contiene todas las aristas, ya hemos acabado. En caso contrario, eliminamos de  $G$  todas las aristas de  $C_0$ , de manera que obtenemos un grafo  $G'$  que vuelve a tener todos los vértices de grado par (aunque no tiene por qué ser conexo). Sea  $H$  un componente conexo de  $G'$  que tenga alguna arista. Como el multigrafo de partida  $G$  es conexo,  $H$  tiene que tener algún vértice de  $C_0$ , digámosle  $v_1$ . Construimos un recorrido dentro de  $H$  a partir de  $v_1$  de forma similar al que hemos hecho desde  $v_0$  en  $G$  y obtenemos un circuito  $C_1$  que no contiene ninguna arista común con  $C_0$ . Entonces,  $C_0 \cup C_1$  es un circuito con un número de aristas estrictamente más grande que  $C_0$ .

Si  $C_0 \cup C_1$  contiene todas las aristas, ya hemos acabado. En caso contrario se puede repetir el procedimiento anterior para obtener una sucesión de circuitos con número de aristas estrictamente creciente. Como el número de aristas de  $G$  es finito, con este procedimiento acabamos construyendo un circuito euleriano.  $\square$

Esta demostración proporciona, entonces, un método constructivo para obtener un circuito euleriano, una vez sabemos que las condiciones del teorema se satisfacen. De hecho se puede usar el razonamiento para obtener un algoritmo que construye un circuito euleriano, cuando es posible.

Este algoritmo, claramente, necesita un mecanismo generador de recorridos. Así, comenzaremos dando un procedimiento *RecorrerCamino* que tiene como objetivo ampliar un recorrido dado. En este procedimiento  $V$  y  $E$  son el conjunto de vértices y de aristas del grafo,  $v$  es un vértice cualquiera de  $V$  y  $\Gamma(w)$  es el conjunto de aristas incidentes con el vértice  $w$ . El procedimiento simplemente añade aristas nuevas, mientras sea posible, a un recorrido dado.

**Entrada:**  $G = (V, E)$ : un grafo;  $v \in V$ .

**Procedimiento** RECORRERCAMINO

1.  $P \leftarrow \emptyset$  [ $P$  es la secuencia de aristas del recorrido]
2.  $U \leftarrow E$  [ $U$  es el conjunto de aristas que aún no están en el recorrido]
3.  $w \leftarrow v$  [Inicializamos  $w$ , final actual del recorrido]
4. **Mientras**  $\Gamma(w) \cap U \neq \emptyset$  **hacer**
  - Tomar  $e \in \Gamma(w) \cap U$
  - $x \leftarrow$  otro extremo de  $e$
  - $U \leftarrow U - e$
  - Añadir  $e$  a  $P$
  - $w \leftarrow x$

**Salida:**  $P$ : camino.

En cada iteración, *RecorrerCamino* toma una arista arbitraria, por la cual aún no se ha pasado, de todas las que inciden con el vértice actual y la añade al recorrido  $P$ . El procedimiento continúa hasta que no hay aristas libres a partir del vértice actual.

El algoritmo *Euler* usa este procedimiento para construir un circuito euleriano en un grafo conexo con todos los vértices de grado par. Observemos la recursividad del algoritmo, que proviene de la demostración en la cual se basa.

**Entrada:**  $G = (V, E)$ : un grafo.

**Algoritmo** EULER

- Procedimiento**  $Euler(V', E', v')$   
 $RecorrerCamino(V', E', v')$  [Encuentra un circuito  $P$  en  $G(V', E')$ ]  
**Si**  $P$  no es un circuito euleriano de  $G(V', E')$  **entonces hacer**

Borrar de  $E$  las aristas que hay en  $P$

Denotar los componentes no triviales del subgrafo

que resulta  $G_1(V_1, E_1), G_2(V_2, E_2), \dots, G_j(V_j, E_j)$

sea  $v_i$  un vértice de  $P$  en  $V_i$

**Para**  $i = 1$  **hasta**  $j$  **hacer**

$Euler(V_i, E_i, v_i)$  [Encuentra un circuito euleriano  $C$  en  $G_i$ ]

Pone  $C$  en  $P$  en la posición  $v_i$

$C \leftarrow P$

**Retorna**  $C$

1.  $v \leftarrow$  cualquier vértice de  $V$ .
2.  $Euler(V, E, v)$ .

**Salida:**  $C$  [Circuito Euleriano de  $G = (V, E)$ ].

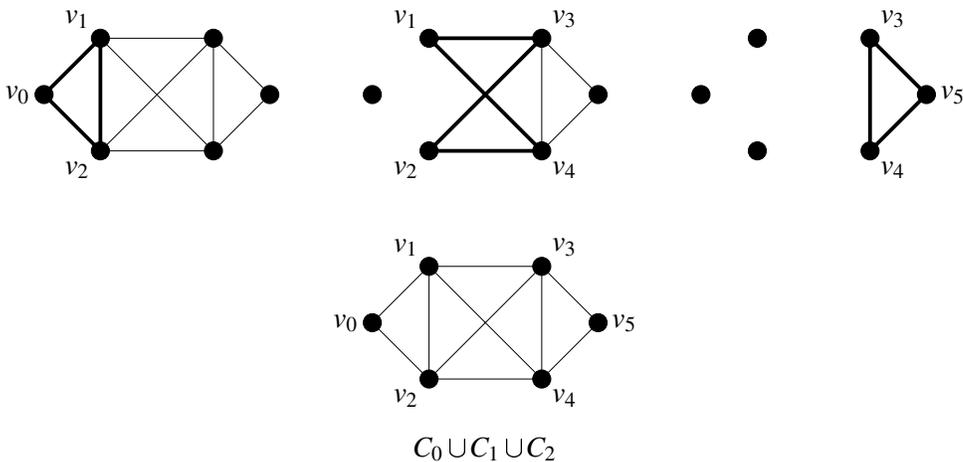


Figura 7.4: Construcción de un circuito euleriano

Usamos el grafo de la figura 7.2 para mostrar el funcionamiento del algoritmo tal como se muestra en la figura 7.4.

Cuando se llama al procedimiento Euler, este llama a *RecorrerCamino*, el cual inicia un recorrido en  $v = v_0$  y produce un circuito. En el grafo del ejemplo suponemos que se obtiene el circuito  $C_0 = v_0, v_1, v_2, v_0$ . Resulta  $P = C_0$ . Como aún no tenemos el circuito euleriano construido, borramos las aristas correspondientes al circuito encontrado  $C_0$  y repetimos el proceso en el resto del grafo comenzando, por ejemplo, en  $v_1$ . Supongamos que encontra-

mos ahora el circuito  $C_1 = v_1, v_4, v_2, v_3, v_1$ . Entonces,  $P$  será  $v_0, v_1, v_4, v_2, v_3, v_1, v_2, v_0$ . Finalmente, comenzando en  $v_4$ , encontramos  $C_2 = v_4, v_3, v_5, v_4$ . El circuito euleriano resulta ser  $v_0, v_1, v_4, v_3, v_5, v_4, v_2, v_3, v_1, v_2, v_0$ .

El teorema 7.1 permite también resolver la cuestión relativa a la existencia de recorridos eulerianos. Esto se debe al hecho que un multigrafo  $G$  admite un recorrido euleriano con vértices terminales  $u$  y  $v$  si y sólo si  $G + uv$  admite un circuito euleriano. Con esta observación es fácil demostrar el resultado siguiente.

**Teorema 7.2.** Un multigrafo  $G$  contiene un recorrido euleriano si y sólo si es conexo (salvo vértices aislados) y el número de vértices de grado impar es 0 o 2.

Cabe observar que, en particular, los extremos de cualquier recorrido euleriano han de ser los vértices de grado impar.

Este resultado da, entonces, una respuesta negativa al problema de los puentes de Königsberg, ya que el grafo de la figura 7.3 no satisface las condiciones necesarias.

Una propiedad característica de los grafos eulerianos es la de admitir siempre alguna descomposición (no necesariamente única) en ciclos. Para hacer precisa esta idea, recordemos que, dados dos grafos  $G_1 = (V_1, E_1)$  y  $G_2 = (V_2, E_2)$ , su unión es  $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$  y su intersección es  $G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$ . Recordemos también que  $G_1 \oplus G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \Delta E_2)$ , donde  $E_1 \Delta E_2$  son todas las aristas que pertenecen a  $E_1$  o a  $E_2$ , pero no a los dos. Finalmente, se dice que  $G = (V, E)$  se *descompone* en los subgrafos  $G_1$  y  $G_2$  cuando  $G_1 \cup G_2 = G$  y  $G_1 \cap G_2 = N$ , donde  $N$  es un grafo nulo. En otras palabras, se dice que  $G$  se descompone en los subgrafos  $G_1$  y  $G_2$  si  $G = G_1 \oplus G_2 = G_1 \cup G_2$ . La descomposición en un número cualquiera de subgrafos se define de forma similar.

**Teorema 7.3.** Un multigrafo conexo  $G$  es euleriano si y sólo si admite una descomposición en ciclos.

*Demostración. Suficiencia:* Sean  $C_1, C_2, \dots, C_n$  ciclos disyuntos en aristas tales que  $G = C_1 \oplus C_2 \oplus \dots \oplus C_n$ . Como el grado de cada vértice en cada ciclo es dos, deducimos que cada vértice de  $G$  tiene grado par.

*Necesidad:* Supongamos que  $G$  es euleriano, y sea  $C$  un circuito euleriano de  $G$ . Si en  $C$  no hay vértices repetidos,  $G$  es ya un ciclo. Si no, sea  $v$  el primer vértice que se repite al recorrer  $C$  desde un vértice inicial  $v_0$  y llamamos  $C_1$  al ciclo que se describe entre las dos primeras apariciones de  $v$ . Entonces, el grafo  $G' = G \setminus E(C_1)$  continúa teniendo todos los vértices de grado par y es conexo salvo vértices aislados, y por tanto es euleriano. Iterando este procedimiento obtenemos una secuencia de ciclos disyuntos en aristas cuya unión es  $G$ .  $\square$

Esta descomposición no necesariamente es única, ya que puede haber más de un circuito euleriano y cada uno de ellos se puede recorrer desde cada uno de sus vértices.

En la figura 7.5 se ilustra la descomposición de un grafo euleriano siguiendo el procedimiento que proporciona la demostración del teorema anterior.

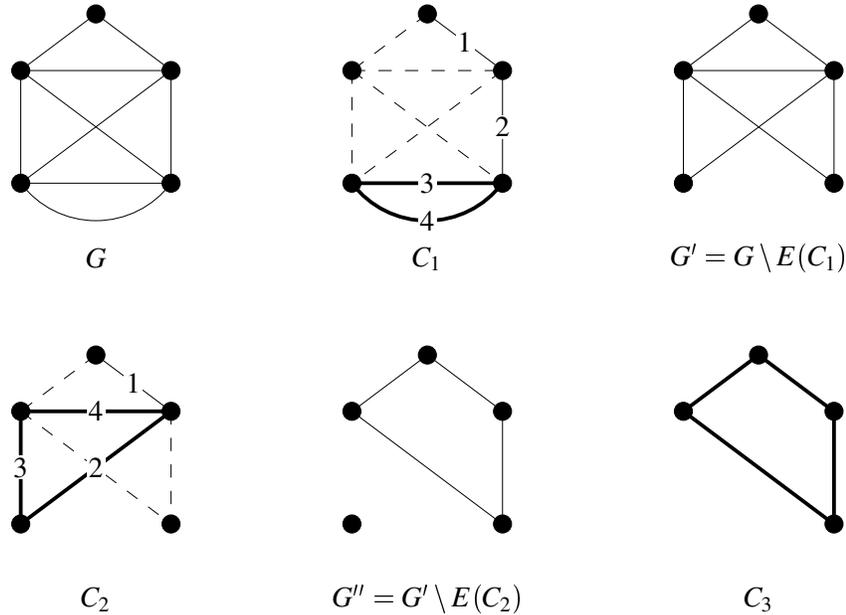


Figura 7.5: Descomposición del grafo  $G$  en los ciclos  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$

La propiedad de ser euleriano se puede extender también al caso de digrafos. Un *recorrido* en un multidigrafo  $G$  es *euleriano* si pasa por todos sus arcos una única vez. Si el recorrido es cerrado diremos que se trata de un *circuito euleriano dirigido* y diremos también que  $G$  es *euleriano*.

La caracterización de digrafos eulerianos se recoge en los resultados siguientes, similares a los que se incluyen en los teoremas 7.1 y 7.2.

Como en el caso no dirigido, si un multidigrafo es euleriano tiene que ser fuertemente conexo (excepto si tiene vértices aislados). Además, al recorrer el circuito, cada vez que incidimos en un vértice  $x$  por una arista, es preciso salir por otra arista incidente desde este mismo vértice y, por tanto,  $d^+(x) = d^-(x)$  para todo  $x \in V(G)$ . Estas dos condiciones necesarias son también suficientes. La demostración de la suficiencia es análoga a la del teorema 7.1 y se propone como ejercicio.

**Teorema 7.4.** Un multidigrafo  $G$  es euleriano si y sólo si es fuertemente conexo (salvo vértices aislados) y para todo  $x \in V(G)$ ,  $d^+(x) = d^-(x)$ .

La existencia de recorridos eulerianos en multidgrafos viene caracterizada en el teorema siguiente, cuya demostración se propone también como ejercicio.

**Teorema 7.5.** Un multidgrafo  $G$  contiene un recorrido euleriano desde el vértice  $u$  hasta el vértice  $v$ , no adyacente hacia  $u$ , si y sólo si el multigrafo subyacente es conexo (salvo vértices aislados), y para todo  $x \in V(G) \setminus \{u, v\}$ ,  $d^+(x) = d^-(x)$ , mientras que  $d^+(u) = d^-(u) + 1$  y  $d^-(v) = d^+(v) + 1$ .

### Secuencias de de Bruijn

Una aplicación interesante de los circuitos eulerianos es la obtención de las llamadas secuencias de de Bruijn. Estas secuencias aparecen en el estudio de los registros cíclicos de desplazamiento, tema este que tiene una amplia aplicación técnica en las telecomunicaciones, la teoría de códigos, la criptografía y las ciencias de la computación.

Dado un alfabeto  $S$  con  $d$  símbolos podemos formar  $d^k$  palabras  $x = x_0x_1 \dots x_{k-1}$ ,  $x_i \in S$ , de longitud  $k$ . Una *secuencia de de Bruijn* es una secuencia circular  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ ,  $x_i \in S$ , de longitud  $n$ , con la propiedad siguiente: para cada palabra  $x$  de longitud  $k$ , existe un único  $i$  tal que  $x = x_i x_{i+1} \dots x_{i+k-1}$ , donde los subíndices se toman módulo  $n$ . Claramente,  $n \geq d^k$ . Veremos a continuación que para todo  $d$  y  $k$  existen soluciones con  $n = d^k$ .

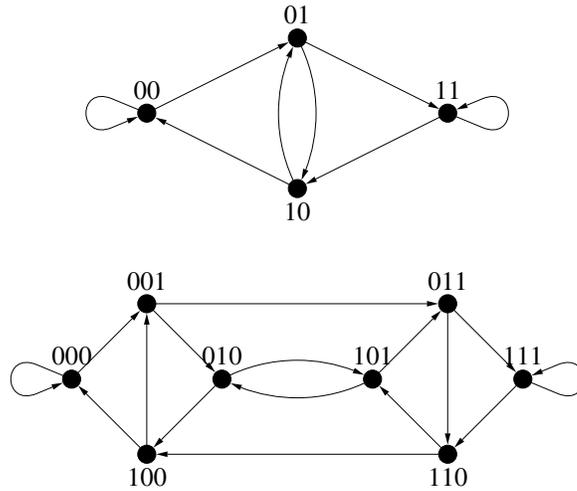
Para demostrar este resultado se introduce la familia de los digrafos de de Bruijn. Esta familia de grafos dirigidos es también interesante en el diseño de grandes redes de interconexión, es decir, redes con muchos nodos de tal forma que cada nodo está conectado como mucho a un número dado de nodos vecinos y la distancia máxima entre nodos también está acotada. El lector interesado en este tema puede consultar por ejemplo [3].

El *digrafo de de Bruijn*  $B(d, k-1) = (V, A)$ ,  $d > 1$ ,  $k > 1$  tiene por conjunto de vértices  $V$  el de las  $d^{k-1}$  palabras de longitud  $k-1$ , siendo el vértice correspondiente a la palabra  $x = x_0, x_1, \dots, x_{k-2}$  adyacente hacia los vértices de la forma  $y = x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ . Cabe notar que cada arco  $a = (x, y) \in A$  queda identificado con una palabra  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$  de longitud  $k$  y que  $B(d, k-1)$  es un multidgrafo, ya que contiene lazos. Los digrafos  $B(2, 2)$  y  $B(2, 3)$  se representan en la figura 7.6.

**Proposición 7.6.**  $B(d, k-1)$  es un digrafo regular con grado  $d$  y tiene  $d^k$  arcos.

*Demostración.* De acuerdo con la regla de adyacencia que define los arcos, cada vértice  $x_0, x_1, \dots, x_{k-2}$  es adyacente hacia los  $d$  vértices diferentes  $x_1, \dots, x_{k-2}, s$ ,  $s \in S$ . Por otra parte,  $x_0, x_1, \dots, x_{k-2}$  es adyacente desde los  $d$  vértices  $s, x_0, x_1, \dots, x_{k-3}$ ,  $s \in S$ . Esto demuestra que el grado de entrada y el grado de salida de cada vértice es  $d$  y, por tanto,  $B(d, k-1)$  es  $d$ -regular. Así,  $|A| = d|V| = d^k$ .  $\square$

De acuerdo con la condición necesaria y suficiente dada en la sección anterior, para que un digrafo sea euleriano, la proposición anterior permite formular el resultado siguiente:

Figura 7.6: Digrafos  $B(2, 2)$  y  $B(2, 3)$ 

**Teorema 7.7.** Para todo  $d > 1$  y  $k > 1$ , el digrafo de de Bruijn  $B(d, k - 1)$  es euleriano.

Consideremos ahora un circuito euleriano  $C$  en  $B(d, k - 1)$ . Como cada arco de  $B(d, k - 1)$  corresponde a una palabra de longitud  $k$  y dos arcos consecutivos del circuito considerado son de la forma  $a_0 = x_0x_1 \dots x_{k-1}$  y  $a_1 = x_1x_2 \dots x_k$ , es evidente que  $C$  da una secuencia de de Bruijn de longitud mínima  $d^k$ .

**Corolario 7.8.** Para todo  $d > 1$  y  $k > 1$  existen secuencias de de Bruijn de longitud  $d^k$ .

*Ejemplo:* El circuito euleriano

$$\begin{aligned} 000 \rightarrow 001 \rightarrow 011 \rightarrow 110 \rightarrow 101 \rightarrow 011 \rightarrow 111 \rightarrow 111 \rightarrow 110 \\ \rightarrow 100 \rightarrow 001 \rightarrow 010 \rightarrow 101 \rightarrow 010 \rightarrow 100 \rightarrow 000 \rightarrow 000 \end{aligned}$$

en  $B(2, 3)$  proporciona la secuencia de de Bruijn 0001101111001010 de longitud 16 para palabras binarias de longitud 4.

## 7.2 Ciclos hamiltonianos

El problema de buscar recorridos cerrados que pasen por todas las aristas de un grafo una única vez se puede modificar ligeramente para considerar caminos cerrados que pasen por todos los vértices una única vez. El célebre matemático irlandés Sir William Rowan Hamilton propuso

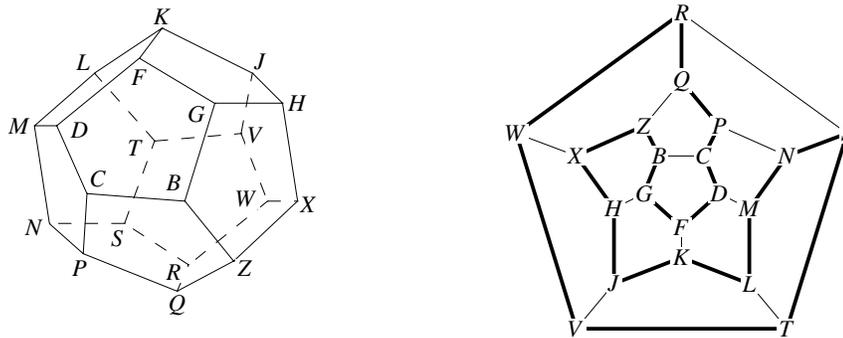


Figura 7.7: La vuelta al mundo de Hamilton y el ciclo en el grafo

en 1886 el problema de encontrar un itinerario para recorrer veinte ciudades alrededor del mundo puestas en los vértices de un dodecaedro de manera que se pase una única vez por cada ciudad y se vuelva a la de salida. Esto corresponde a encontrar un ciclo cerrado que pase una única vez por todos los vértices del grafo del dodecaedro (ver la figura 7.7).

Por ello se llama *ciclo hamiltoniano* en un grafo a un camino cerrado que pasa una única vez por cada vértice (estrictamente hablando, dos veces por el vértice inicial que es también el final). Un grafo es *hamiltoniano* si contiene un ciclo hamiltoniano. De forma similar, un camino *hamiltoniano* es un camino que pasa una única vez por cada vértice.

A pesar de ser nociones próximas, la propiedad de ser hamiltoniano y de ser euleriano son independientes. En la figura 7.8 se puede ver el grafo más pequeño que es (a) euleriano y hamiltoniano a la vez, (b) euleriano pero no hamiltoniano, (c) no euleriano pero hamiltoniano y (d) ni hamiltoniano ni euleriano.

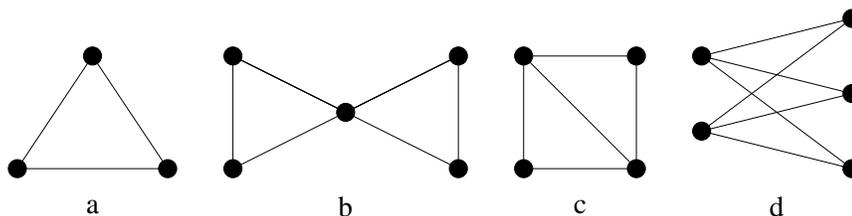


Figura 7.8: Grafo (a) euleriano y hamiltoniano; (b) euleriano y no hamiltoniano; (c) hamiltoniano y no euleriano; (d) ni hamiltoniano ni euleriano

Otra diferencia importante entre estas dos nociones es que, así como saber si un grafo es o no euleriano se responde con un teorema sencillo y definitivo en términos de la estructura del grafo, el problema de saber si es hamiltoniano resulta mucho más difícil: de hecho este es uno de los grandes problemas abiertos en la teoría de grafos y hasta ahora no se conoce ningún resultado que dé condiciones necesarias y suficientes para responder a esta cuestión. Los tipos de resultados que se conocen son, o bien resultados generales que dan condiciones suficientes, o bien resultados específicos relativos a familias particulares de grafos. A continuación exponemos ejemplos de los dos tipos. En toda esta sección supondremos que  $G$  es un grafo conexo.

Intuitivamente está claro que si el grafo tiene un número suficiente de aristas es más fácil poder recorrer un ciclo hamiltoniano. Hay una gran cantidad de resultados que hacen precisa esta intuición. Muchos de ellos se basan en la observación siguiente:

**Lema 7.9.** Sea  $G$  un grafo de  $n$  vértices y  $u, v$  dos vértices no adyacentes tales que  $d(u) + d(v) \geq n$ . Entonces,  $G$  es hamiltoniano si y sólo si  $G + uv$  es hamiltoniano.

*Demostración.* Está claro que, si  $G$  es hamiltoniano,  $G + uv$  también lo es.

Supongamos que  $G + uv$  es hamiltoniano y sea  $H$  un ciclo hamiltoniano de este grafo. Si no contiene la arista  $uv$ ,  $H$  también es un ciclo hamiltoniano en  $G$ . En caso contrario,  $H' = H - uv$  es un camino hamiltoniano en  $G$ , y sea  $u = w_1 w_2 \dots w_{n-1} w_n = v$ . Llamamos  $U$  a los vértices tales que su sucesor en el camino es adyacente a  $u$ ,  $U = \{w_k : uw_{k+1} \in E(G)\}$  y  $V$  a los vértices adyacentes a  $v$ ,  $V = \{w_k : vw_k \in E(G)\}$ . Tenemos  $|U \cup V| < n$ , ya que  $v$  no pertenece a ninguno de los dos conjuntos, de manera que

$$n > |U \cup V| = |U| + |V| - |U \cap V| = d(u) + d(v) - |U \cap V| \geq n - |U \cap V|$$

o sea, que  $U \cap V$  no es vacío. Si  $w_k \in U \cap V$ , podemos formar el ciclo hamiltoniano

$$u = w_1, w_2, \dots, w_k, v, w_{n-1}, \dots, w_{k+1}, u$$

tal como se indica en la figura 7.9. □

Con este lema no es difícil demostrar uno de los resultados clásicos sobre esta cuestión.

**Teorema 7.10 (Ore, 1961).** Si para cada par de vértices no adyacentes  $u, v$  de un grafo  $G$  de  $n$  vértices,  $n \geq 3$ , se satisface  $d(u) + d(v) \geq n$ , entonces  $G$  es hamiltoniano.

*Demostración.* De acuerdo con el lema anterior y las hipótesis del teorema, si  $u$  y  $v$  son dos vértices no adyacentes,  $G$  es hamiltoniano si y sólo si lo es también  $G + uv$ . En realidad podemos añadir a  $G$  todas las aristas que unen vértices no adyacentes sin alterar la propiedad que el grafo sea hamiltoniano. Así, entonces,  $G$  es hamiltoniano si y sólo si el grafo completo

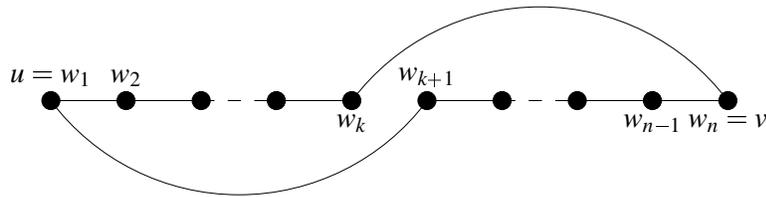


Figura 7.9:

$K_n$  que se obtiene de esta manera lo es también. Está claro que en  $K_n$  podemos describir un ciclo hamiltoniano simplemente visitando cualquier vértice no recorrido hasta que esto no sea posible y volviendo entonces al vértice inicial.  $\square$

En particular, se obtiene también este otro resultado clásico:

**Teorema 7.11 (Dirac, 1952).** Un grafo  $G$  de  $n$  vértices,  $n \geq 3$ , tal que su grado mínimo satisfice  $\delta(x) \geq n/2$ , es hamiltoniano.

En cuanto a resultados relativos a familias de grafos, resulta obvio por ejemplo que los ciclos  $C_n$  son hamiltonianos. Esto es también cierto para los grafos completos  $K_n$ , tal como hemos mencionado en la demostración del teorema anterior. En cambio no lo es para los bipartitos completos  $K_{n,m}$  con  $n \neq m$ . En el ejercicio 15 se dan indicaciones para estudiar el problema en los grafos bipartitos. Quizá el tipo de resultados más fuertes relativos a familias especiales de grafos sea el que hace referencia a los grafos planares. Tal como se ha visto en el capítulo 5, un grafo es planar cuando se puede dibujar en el plano de manera que sus aristas no se corten. Por otra parte, un grafo es  $k$ -conexo si la supresión de menos de  $k$  vértices no lo desconecta (capítulo 8). La caracterización de grafos planares hamiltonianos está históricamente relacionada con el célebre teorema de los cuatro colores, que dice que cualquier mapa dibujado sobre un papel admite una coloración de países, de manera que dos países adyacentes tengan colores diferentes, usando sólo cuatro colores. No se habría tenido que esperar 150 años para ver este teorema demostrado si se hubiese podido demostrar que cualquier grafo planar 3-regular y 3-conexo admite un ciclo hamiltoniano (cosa que no es cierta). Lo que sí se puede asegurar es el resultado siguiente, cuya demostración se puede encontrar por ejemplo en [2].

**Teorema 7.12 (Tutte, 1956).** Un grafo planar 4-conexo es hamiltoniano.

Como es habitual, las nociones anteriores se generalizan fácilmente al caso de grafos dirigidos. Intuitivamente parece que será aún más difícil encontrar caminos dirigidos hamiltonianos, ya que la orientación es una restricción añadida. Sin embargo, el problema de saber si un digrafo  $D$  es hamiltoniano se puede reducir al caso no dirigido con la construcción siguiente.

Construimos un grafo  $G$  que tiene, por cada vértice  $u$  de  $D$ , un camino de longitud 3,  $x_u y_u z_u$ . Si  $u$  es adyacente hacia  $v$  en el digrafo  $D$ , entonces  $x_u$  es adyacente a  $z_v$  en el grafo  $G$ . Es fácil comprobar que  $D$  es hamiltoniano si y sólo si  $G$  lo es. En la figura 7.10 hay dibujados un digrafo  $D$  y el grafo  $G$  construido a partir de  $D$  de esta manera.

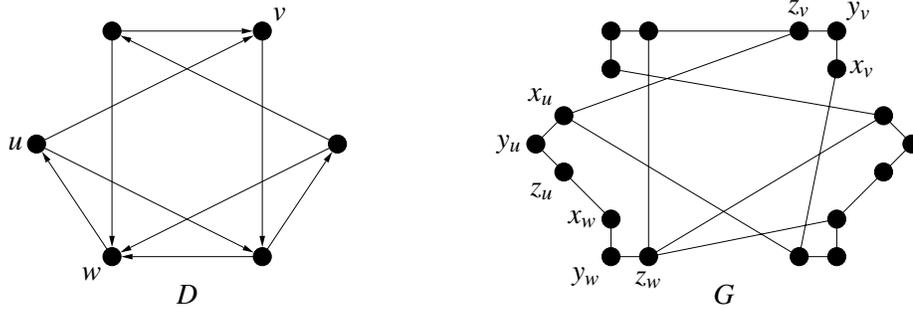


Figura 7.10: El digrafo  $D$  es hamiltoniano si y sólo si  $G$  lo es

Además, se pueden encontrar en el caso dirigido resultados similares a los del caso no dirigido, aunque las técnicas de demostración no siempre son similares. Por ejemplo, el teorema equivalente al de Ore en el caso dirigido es el teorema de Meyniel, cuya demostración se puede ver por ejemplo en [2].

**Teorema 7.13.** Sea  $D$  un digrafo fuertemente conexo de orden  $n$  tal que para cada par de vértices  $u$  y  $v$  no adyacentes (ni  $uv$  ni  $vu$  son arcos del digrafo) se satisface  $d(u) + d(v) \geq 2n - 1$ , donde  $d(x) = d^+(x) + d^-(x)$ . Entonces  $D$  es hamiltoniano.

Una aplicación inmediata de este resultado es que los digrafos fuertemente conexos que se obtienen orientando las aristas de un grafo completo son hamiltonianos (estos grafos se llaman *torneos*, y han sido extensamente estudiados).

### Algoritmos para encontrar ciclos hamiltonianos

Determinar si un grafo  $G(V, A)$  es hamiltoniano es un problema NP-completo. Los algoritmos exactos que dan un circuito hamiltoniano solamente son aplicables cuando  $|V|$  es pequeña, o bien sobre determinados tipos de grafos. En general se aplican algoritmos aproximados que no pueden garantizar, caso de no encontrar un ciclo hamiltoniano, que este no exista.

Para grafos de Ore, es decir, que satisfacen las condiciones del teorema 7.10, existen algoritmos que encuentran un ciclo hamiltoniano. El más conocido es de orden  $O(|V|^3)$  y fue propuesto por Bondy y Chvátal (1974). Un algoritmo de orden  $O(|V|^2)$  ha sido propuesto recientemente [9].

**Entrada:**  $G = (V, E)$ : un grafo de Ore.

**Algoritmo** ALBERTSON

1. Crear un camino maximal  $P : u, \dots, x_k, \dots, v$ .
2. **Mientras**  $|V(C)| \neq |V(G)|$  **hacer**  
     **Si**  $u$  es adyacente a  $v$  **entonces hacer**  $C : u, \dots, v, u$   
     **sino** encontrar  $k$  tal que  $u$  sea adyacente a  $x_k + 1$  y  $v$  a  $x_k$
3.  $C \leftarrow u, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, v, x_k, x_{k-1}, \dots, x, u$
4. Encontrar  $x \in V(G - C)$  y crear  $P^*$ , un camino que contenga  $x$  y todo  $C$ .
5. Hacer  $P$  un camino maximal que contenga  $P^*$

**Salida:**  $C$  [Ciclo Hamiltoniano de  $G = (V, E)$ ].

### El problema del viajante

Una variante al problema de encontrar un ciclo hamiltoniano en un grafo es el conocido problema del viajante. En este problema, un viajante tiene que visitar un conjunto de ciudades de forma que pase solamente una vez per cada una y que el trayecto total realizado sea mínimo. El modelo será entonces un grafo con pesos en las aristas que representen las distancias. Entonces se trata de encontrar un ciclo hamiltoniano tal que la suma de los pesos de las aristas sea mínima. El problema es también NP-completo. Por ello, los esfuerzos se han concentrado en dar algoritmos aproximados y métodos heurísticos. Los métodos heurísticos podrían ser clasificados entre aquellos que construyen una posible solución y los que intentan mejorar sistemáticamente una solución inicial. Correspondiente al primer tipo hay un método heurístico sencillo conocido como del *vecino más próximo*. Se comienza en un vértice y se añade la arista de distancia mínima. A continuación se van poniendo aristas de distancia mínima en cada extremo del camino. Este método no es muy eficaz, ya que puede dejar de considerar aristas cortas, y cerrar el camino para hacer el ciclo suele ser muy costoso.

Un manera de reducir los problemas que aparecen con este algoritmo consiste en comenzar con un ciclo corto y expandirlo insertando vértices de manera que, en cada paso, el peso total de las aristas del ciclo aumente el mínimo posible. Esta técnica es conocida como *algoritmo de inserción mínima*. También podemos encontrarnos con dificultades provinientes, esencialmente, del hecho que un grafo arbitrario con pesos no tiene por qué verificar la desigualdad triangular respecto de los pesos. Si ésta se verifica podemos dar el algoritmo siguiente:

**Entrada:**  $G = (V, E)$ : un grafo con pesos que satisface la desigualdad triangular.

**Algoritmo** INSERCIÓN MÍNIMA

1. Seleccionar un vértice cualquiera y considerarlo un ciclo  $C_1$  de  $G$ .
  2.  $i \leftarrow 1$
  3. **Si**  $i = |V|$  **entonces**  $C = C_{|V|}$ . Ir a la salida.  
**sino** si  $C_i$  ha sido escogido,  $1 \leq i \leq |V|$ , entonces dar un vértice  $v_i$  que no esté en  $C_i$  próximo a dos vértices consecutivos  $w_i$  y  $w_{i+1}$  de  $C_i$ .
  4.  $C_{i+1}$  se forma insertando  $v_i$  entre  $w_i$  y  $w_{i+1}$
- Salida:**  $C$  [Ciclo Hamiltoniano que aproxima el ciclo del viajante].
- 

Entre el segundo tipo de métodos hay los conocidos métodos de intercambio de aristas de Lin (1965) y Lin y Kernighan (1973). Estos métodos se basan en modificar un ciclo inicial intercambiando aristas (dos o más). Ver la figura 7.11.

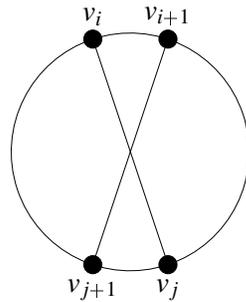


Figura 7.11:

Damos a continuación un algoritmo basado en el intercambio de dos aristas.

---

**Entrada:**  $G = (V, E)$ : un grafo con pesos.

**Algoritmo** LIN Y KERNIGHAN

1. Considerar un ciclo hamiltoniano inicial  $C : v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$  de  $G$ .
2. **Para**  $i, j$  tales que  $1 < i + 1 < j < |V|$   
 Obtener un nuevo ciclo  
 $C_{ij} = v_1, v_2, \dots, v_i, v_j, v_{j-1}, \dots, v_{i+1}, v_{j+1}, v_{j+2}, \dots, v_{|V|}, v_1$   
**Si**  $w(v_i, v_j) + w(v_{i+1}, v_{j+1}) < w(v_i, v_{i+1}) + w(v_j, v_{j+1})$  **entonces**  $C \leftarrow C_{ij}$

**Salida:**  $C$  [Ciclo Hamiltoniano que aproxima el ciclo del viajante].

---

Más recientemente, y también basados en el intercambio de aristas, se han dado algoritmos que consiguen buenos resultados para problemas con un número elevado de ciudades. Una familia de algoritmos se basa en el recocido simulado (*simulated annealing*). El método proviene de la analogía entre los estados de un sistema físico, por ejemplo un líquido, y los estados que puede tomar el problema de optimización. Esencialmente, el algoritmo es el mismo que antes, sólo que ahora los cambios se aceptan con una cierta probabilidad  $e^{-\Delta E/(KT)}$ . De esta manera, el algoritmo admite cambios que empeoren el ciclo encontrado y así es posible evitar mínimos locales. El parámetro  $T$  se asocia con la temperatura del estado físico que modela (a más temperatura, más desorden) y  $E$  con la energía (en el modelo físico se trata de bajar la temperatura para conseguir un estado de energía mínima) [13], [1]. Otra familia de algoritmos que se ha aplicado con éxito al problema del viajante, la familia de los *algoritmos genéticos*, se basa en la mecánica de la selección natural y la genética [10]. Posibles soluciones al problema, generadas aleatoriamente, forman una *población*. En cada iteración se genera una nueva población reproduciendo y cruzando entre sí las soluciones de la generación anterior seleccionadas probabilísticamente de acuerdo con su coste. Un mecanismo de *mutación* permite reducir las posibilidades de encontrar mínimos locales.

### 7.3 Ciclos fundamentales

Dado un grafo  $G$  simple y conexo con  $n$  vértices y  $m$  aristas, sea  $\mathcal{C}$  el conjunto de todos los subgrafos de  $G$  que son descomponibles en ciclos o, de manera equivalente, que son ciclos o suma  $\oplus$  de ciclos disyuntos en aristas. Estudiaremos en esta sección cómo se puede distinguir en  $G$  una colección de  $m - n + 1$  ciclos, llamados *fundamentales*, a partir de los cuales se puede expresar cualquier subgrafo  $C \in \mathcal{C}$ . En la sección siguiente se verá una aplicación importante de este resultado al análisis de redes eléctricas.

#### Subespacio de ciclos

En primer lugar demostremos que el conjunto  $\mathcal{C}$  es estable por la operación  $\oplus$ .

**Teorema 7.14.** Si  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ , entonces  $C_1 \oplus C_2 \in \mathcal{C}$ .

*Demostración.* Si  $C_1$  y  $C_2$  no tienen vértices en común, el resultado es trivial. De otro modo, sea  $v$  un vértice común a  $C_1$  y  $C_2$  y supongamos que ninguna de las aristas incidentes con  $v$  es común a  $C_1$  y  $C_2$ . Como  $v$  tiene en  $C_1$  y  $C_2$  grado par, también tendrá grado par en  $C = C_1 \oplus C_2$  (ver la figura 7.12a). Por otra parte, si la arista  $e$  incidente con  $v$  es común a  $C_1$  y  $C_2$ ,  $e$  no aparece en  $C_1 \oplus C_2$  y, por tanto, el grado resultante de  $v$  en  $C$  continuará siendo par (figura 7.12b). En cualquiera de los casos, cada vértice  $v \in V(C)$  tiene en  $C$  grado par y, por

tanto, el grafo  $C$  es euleriano. De acuerdo con el teorema 7.3,  $C$  se puede descomponer en ciclos disyuntos en aristas, es decir,  $C \in \mathcal{C}$ .  $\square$

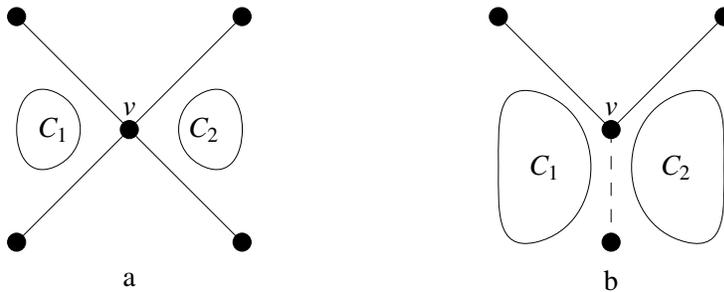


Figura 7.12:

Sea  $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ . Podemos asociar a  $G$  un espacio vectorial finito  $E = E(G)$  de dimensión  $m$  de la forma siguiente: cada vector  $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_m) \in E$ , con  $h_i = 0, 1$ ,  $1 \leq i \leq m$ , representa el subgrafo  $H$  de  $G$  inducido por las aristas  $e_i \in E(G)$  tales que  $h_i = 1$ . Dados  $\mathbf{h}, \mathbf{g} \in E$ ,  $\mathbf{h} \oplus \mathbf{g}$  es el vector  $(h_1 \oplus g_1, h_2 \oplus g_2, \dots, h_m \oplus g_m)$ , donde  $\oplus$  es la suma módulo 2. Análogamente, si  $\alpha = 0, 1$  y  $\mathbf{h} \in E$ ,  $\alpha \mathbf{h} = (\alpha h_1, \alpha h_2, \dots, \alpha h_m)$ , donde  $\alpha h_i$  se calcula multiplicando módulo 2. Notemos que la operación interna  $\oplus$  definida en  $E$  es compatible con la suma  $\oplus$  de subgrafos de  $G$ , es decir, si el vector  $\mathbf{h}$  corresponde al subgrafo  $H$  y el vector  $\mathbf{k}$  al subgrafo  $K$ , entonces  $\mathbf{h} \oplus \mathbf{k}$  corresponde a  $H \oplus K$  (no es preciso considerar los posibles vértices aislados). Teniendo presente esta identificación, usaremos indistintamente las notaciones  $H$  o  $\mathbf{h}$  para referirnos a un determinado subgrafo o al vector que lo representa.

*Ejemplo:* En el grafo de la figura 7.13, los subgrafos  $H$  y  $K$  vienen representados por los vectores  $h = (0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0)$  y  $k = (1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1)$  respectivamente. Así, el vector que corresponde a  $H \oplus K$  es  $h \oplus k = (1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1)$ .

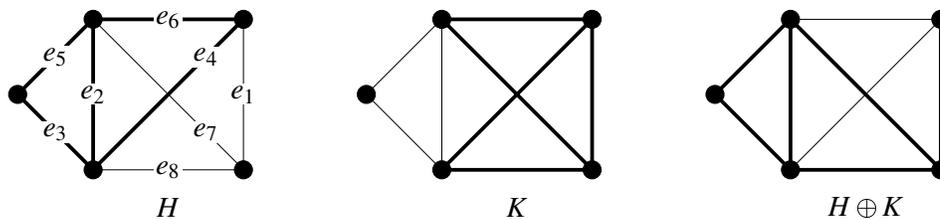


Figura 7.13: Suma  $\oplus$  de subgrafos

En particular, el teorema 7.14 nos dice que  $\mathcal{C}$  corresponde a un subespacio vectorial de  $E$ , que podemos llamar *subespacio de ciclos*.

Se puede formular una caracterización interesante del subespacio  $\mathcal{C}$  de los ciclos a partir de la matriz de incidencia  $\mathbf{B}$  del grafo  $G$ . Esta caracterización se utilizará en la sección siguiente, donde se estudiará la aplicación de la teoría de los ciclos fundamentales al análisis de redes eléctricas. Notemos que cada fila de  $\mathbf{B}$  es un vector  $\mathbf{b} \in E$ .

Dados  $\mathbf{h}, \mathbf{k} \in E$  definimos  $\mathbf{h} \cdot \mathbf{k} \equiv \sum_{\oplus} h_i k_i = h_1 k_1 \oplus h_2 k_2 \oplus \cdots \oplus h_m k_m$  y diremos que  $\mathbf{h}$  y  $\mathbf{k}$  son *ortogonales* si  $\mathbf{h} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{0}$ . De acuerdo con esta definición, dos vectores son ortogonales cuando corresponden a subgrafos disyuntos en aristas o con un número par de aristas comunes.

**Teorema 7.15.** El vector  $\mathbf{c}$  pertenece a  $\mathcal{C}$  si y sólo si  $\mathbf{c}$  es ortogonal a cada fila de  $\mathbf{B}$ .

*Demostración.* (a) Supongamos que  $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$ . Sea  $v \in V(C)$ , donde  $C$  es el subgrafo representado por el vector  $\mathbf{c}$ , y sea  $\mathbf{b}_v$  la fila de  $\mathbf{B}$  que corresponde al vértice  $v$ . Como el número de aristas de  $C$  incidentes en  $v$  es par, claramente  $\mathbf{b}_v \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0}$ . Si  $v \notin V(C)$  también, trivialmente,  $\mathbf{b}_v$  es ortogonal a  $\mathbf{c}$ .

(b) Sea  $\mathbf{c} \in E$  ortogonal a cada vector fila de  $\mathbf{B}$ . Esto quiere decir que cada vértice  $v$  del grafo tiene en  $C$  grado par (o cero). (¿Por qué?) Así,  $C$  es euleriano y se descompone en ciclos disyuntos en aristas.  $\square$

Consideremos ahora un árbol generador  $T$  del grafo  $G$  y sea  $c$  una cuerda respecto a  $T$ . El subgrafo  $T + c$  contiene exactamente un ciclo  $C_c$  de  $G$ . Este ciclo  $C_c$  creado añadiendo la cuerda  $c$ , lo llamamos *ciclo fundamental respecto a  $T$* . Como todo árbol generador tiene  $n - 1$  aristas, existen  $\mu = m - n + 1$  ciclos fundamentales. El parámetro  $\mu$  se conoce como el *número ciclomático* de  $G$ .

*Ejemplo:* Para el grafo  $G$  de la figura 7.14, con  $E(G) = \{c_1, c_2, c_3, c_4, r_5, r_6, r_7, r_8\}$ , los ciclos fundamentales asociados a las cuerdas  $c_1, c_2, c_3, c_4$  respecto del árbol generador considerado son:

- $C_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0)$
- $C_2 = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1)$
- $C_3 = (0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1)$
- $C_4 = (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1)$

**Teorema 7.16.** Los  $\mu$  ciclos fundamentales respecto a un árbol generador  $T$  constituyen una base del subespacio de ciclos  $\mathcal{C}$ .

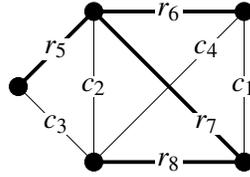


Figura 7.14: Ciclos fundamentales

*Demostración.* Sean  $C_1, C_2, \dots, C_\mu$  los ciclos fundamentales asociados a las cuerdas  $c_1, c_2, \dots, c_\mu$  (respecto al árbol generador  $T$ ). Se tiene que demostrar que  $C_1, C_2, \dots, C_\mu$  son linealmente independientes y que generan  $\mathcal{C}$ .

(a) Cada  $C_i$  contiene exactamente una cuerda, es decir, la cuerda  $c_i$ . Por tanto, el componente  $i$ -ésimo de  $\alpha_1 C_1 \oplus \alpha_2 C_2 \oplus \dots \oplus \alpha_\mu C_\mu$  es  $\alpha_i$ . Así, entonces,  $\alpha_1 C_1 \oplus \alpha_2 C_2 \oplus \dots \oplus \alpha_\mu C_\mu = \mathbf{0}$  implica necesariamente  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_\mu = 0$ .

(b) Sea  $C \in \mathcal{C}$  y  $c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_r}$ ,  $1 \leq r \leq \mu$ , las aristas de  $C$  que son cuerdas respecto al árbol generador  $T$  considerado. Por otra parte, sea  $\Gamma = C_{i_1} \oplus C_{i_2} \oplus \dots \oplus C_{i_r}$  (en  $\mathcal{C}$ ) y supongamos que  $\Gamma \neq C$ . Es evidente que las cuerdas de  $\Gamma$  son también  $c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_r}$ . Pero entonces el subgrafo  $\Gamma \oplus C$  no contiene ninguna cuerda y, por tanto, es imposible que pertenezca a  $\mathcal{C}$ , cosa que contradice el teorema 7.14. Así,  $C = \Gamma = C_{i_1} \oplus C_{i_2} \oplus \dots \oplus C_{i_r}$ , y  $C$  es generado por los ciclos fundamentales.  $\square$

*Ejemplo:* Para el grafo de la figura 7.14, el ciclo  $C = (0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0)$  es una combinación de los ciclos fundamentales  $C_3 = (0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1)$  y  $C_4 = (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1)$ , ya que las aristas de  $C$  que son cuerdas respecto del árbol generador considerado son  $c_3$  y  $c_4$ .

### Matriz de ciclos fundamentales

Si  $C_1, C_2, \dots, C_\mu$ , son los ciclos fundamentales de  $G$ , la *matriz de ciclos fundamentales*  $\mathbf{C}_f = \mathbf{C}_f(G)$  es la matriz binaria  $\mu \times m$  que tiene por elementos  $(c_{ij})$ :

$$(c_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{si la arista } e_j \text{ pertenece al ciclo } C_i, \\ 0 & \text{de otro modo;} \end{cases}$$

es decir, sus vectores fila son los vectores asociados a los ciclos fundamentales.

El teorema 7.15 nos dice que

$$\mathbf{B} \mathbf{C}_f^T = \mathbf{C}_f \mathbf{B}^T = \mathbf{0}$$

siendo  $\mathbf{B}$  la matriz de incidencia.

## Cociclos

Un concepto dual del de ciclo, y también interesante por sus aplicaciones, es el de corte simple o cociclo. Un conjunto de aristas de corte en un grafo  $G = (V, E)$  (que continuamos suponiendo simple y conexo) es un conjunto  $S \subset E$  tal que  $G - S = (V, E \setminus S)$  es no conexo. Un *corte simple* o *cociclo* es un conjunto de corte  $S$  minimal, es decir, tal que ningún subconjunto propio desconecta el grafo.

Sea  $T$  un árbol generador de  $G$ . Si  $r$  es una arista de  $T$ , sean  $V_1$  y  $V_2$  los conjuntos de vértices correspondientes a los dos componentes de  $T - r$ . Notemos que  $V_1$  y  $V_2$  constituyen una partición de  $V(G)$ . El corte simple,  $S_r$ , de  $G$  asociado a esta partición se llama el corte fundamental o *cociclo fundamental* asociado a  $r$ . Por tanto, el número de cociclos fundamentales de  $G$  es el número de aristas de un árbol generador, es decir,  $n - 1$ . Así como cada ciclo fundamental contiene exactamente una cuerda y el resto de las aristas del ciclo son aristas del árbol generador, cada cociclo fundamental contiene exactamente una arista del árbol generador y el resto de elementos son cuerdas.

*Ejemplo:* Para el grafo de la figura 7.14, los 4 cociclos fundamentales asociados a las aristas del árbol generador considerado son:

- $S_5 = \{r_5, c_3\}$
- $S_6 = \{r_6, c_1, c_4\}$
- $S_7 = \{r_7, c_1, c_2, c_3, c_4\}$
- $S_8 = \{r_8, c_2, c_3, c_4\}$

Sea  $\mathcal{S}$  el conjunto de los subgrafos de  $G$  que son descomponibles en cociclos. El conjunto  $\mathcal{S}$  es también estable por la operación  $\oplus$  (problema 19). Además, cada corte simple  $S$ , lo podemos representar mediante un vector  $s \in \mathbb{E}$ . De hecho,  $\mathcal{S}$  corresponde a un subespacio vectorial de  $\mathbb{E}$  llamado *subespacio de cociclos*. Una base del subespacio de cociclos la constituye un conjunto de  $n - 1$  cociclos fundamentales respecto de un árbol generador del grafo.

Para finalizar esta discusión, presentamos los teoremas siguientes que relacionan los ciclos y cociclos fundamentales respecto de un árbol generador  $T$ .

**Teorema 7.17.** Cada arista  $r$  de  $T$ , que determina el cociclo fundamental  $S_r$ , aparece en cada ciclo fundamental asociado con las aristas de  $S_r$  que son cuerdas, y  $r$  no aparece en ningún otro ciclo fundamental.

*Demostración.* Sea  $S_r = \{r, c_1, \dots, c_k\}$ , donde  $c_1, \dots, c_k$  son cuerdas. Como cada ciclo tiene con cada cociclo un número par de aristas en común (¿por qué?), si  $C_{c_i}$  es el ciclo fundamental asociado a  $c_i \in S_r$ , entonces  $S_r \cap E(C_{c_i}) = \{r, c_i\}$ . Por tanto,  $r$  aparece en cada ciclo fundamental

asociado con una cuerda de  $S_r$ . Con un razonamiento similar se demuestra que  $r$  no puede aparecer en ningún otro ciclo fundamental.  $\square$

**Teorema 7.18.** Cada cuerda  $c$ , que determina el ciclo fundamental  $C_c$ , aparece en cada cociclo fundamental asociado a las aristas (respecto de  $T$ ) de  $C_c$ , y  $c$  no aparece en ningún otro cociclo fundamental.

La demostración de este resultado se deja como ejercicio (ver el problema 20). El lector tendría que comprobar los dos teoremas anteriores en el grafo de la figura 7.14.

### Ciclos fundamentales en digrafos

La teoría de los ciclos fundamentales se puede extender sin dificultad al caso dirigido. Cuando  $G$  es un digrafo (sin lazos) con conjunto de arcos  $A(G) = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ , los vectores ciclo se definen de la manera siguiente: sea  $G^*$  el grafo subyacente que resulta de  $G$  al suprimir la orientación de los arcos. Supongamos que  $G^*$  es conexo, aunque puede tener aristas paralelas. Si  $C$  es un ciclo de  $G^*$ , orientamos  $C$  de manera arbitraria, por ejemplo en sentido horario. Entonces, el vector  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$ , que representa a  $C$  en el digrafo  $G$ , tiene el componente  $\gamma_i = 1$  si el arco  $a_i$  pertenece a  $C$  y las orientaciones coinciden,  $\gamma_i = -1$  si el arco  $a_i$  pertenece a  $C$  y las orientaciones no coinciden. Si el arco  $a_i$  no pertenece a  $C$ , entonces  $\gamma_i = 0$ .

Si  $G$  tiene  $n$  vértices, un árbol generador  $T$  de  $G$  es un subgrafo de  $G^*$  que es árbol y tal que  $V(T) = V(G^*)$ . Los ciclos fundamentales se definen ahora como en el caso no dirigido.

*Ejemplo:* Para el digrafo  $G$  de la figura 7.15, los ciclos fundamentales asociados a las cuerdas  $c_1, c_2, c_3, c_4$  respecto del árbol generador considerado son:

- $C_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0)$
- $C_2 = (0, -1, 0, 0, 0, 0, 1, 1)$
- $C_3 = (0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1)$
- $C_4 = (0, 0, 0, -1, 0, 1, -1, -1)$

donde  $A(G) = \{c_1, c_2, c_3, c_4, r_5, r_6, r_7, r_8\}$  y los ciclos se consideran orientados en sentido horario.

Ahora asociamos a  $G$  el espacio vectorial real  $\mathbf{R}^m$ . El subespacio de ciclos  $\mathcal{C}$  es el subespacio generado por los vectores ciclo. Con estas definiciones, los teoremas 7.15 y 7.16 también se verifican para digrafos. En cuanto al teorema 7.15, la ortogonalidad entre vectores se entiende en el sentido usual en  $\mathbf{R}^m$ , y la matriz  $\mathbf{B}$  es la matriz de incidencia del digrafo, tal como se ha definido en el capítulo 7. Por ejemplo, demostremos para el caso dirigido la proposición siguiente (que forma parte del teorema 7.15).

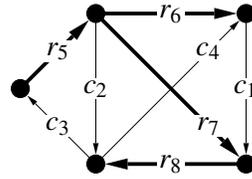


Figura 7.15: Ciclos fundamentales en el digrafo  $G$

**Proposición 7.19.** Si el vector  $\mathbf{c}$  es ortogonal a cada fila de la matriz  $\mathbf{B}$ , entonces  $\mathbf{c}$  es combinación lineal de ciclos fundamentales.

*Demostración.* Sean  $\gamma_j$ ,  $1 \leq j \leq \mu$  los componentes de  $\mathbf{c}$  que corresponden a las cuerdas respecto del árbol generador  $T$  considerado. Demostremos que  $\mathbf{c} = \sum_{j=1}^{\mu} \gamma_j C_j$ , donde los  $C_j$  son los ciclos fundamentales. En efecto, si consideramos el vector  $\mathbf{d} = \mathbf{c} - \sum_{j=1}^{\mu} \gamma_j C_j$ ,  $\mathbf{d}$  sólo puede tener diferente de cero los componentes que corresponden a aristas de  $T$ . Además,  $\mathbf{d}$  también es ortogonal a cada fila de  $\mathbf{B}$  (¿por qué?). Consideremos ahora un vértice  $v$  que tenga grado 1 en  $T$  y sea  $a_k$  la arista de  $T$  incidente con  $v$ . Entonces, por la ortogonalidad supuesta, el componente  $d_k$  de  $\mathbf{d}$  tiene que ser 0. Repitiendo este razonamiento con el árbol  $T_1$  que resulta de  $T$  al suprimir los vértices de grado 1, demostramos que también aquellos componentes del vector  $\mathbf{d}$  que corresponden a vértices de grado 2 en  $T$  son 0. Iterando el proceso se obtiene  $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ , es decir,  $\mathbf{c} = \sum_{j=1}^{\mu} \gamma_j C_j$ , tal como se quería demostrar.  $\square$

*Ejemplo:* Para el digrafo de la figura 7.15, el ciclo  $C = (0, 0, 1, -1, 1, 1, 0, 0)$  es  $C_3 + C_4$  donde  $C_3$  y  $C_4$  son los ciclos fundamentales  $(0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1)$  y  $(0, 0, 0, -1, 0, 1, -1, -1)$ .

La última sección del capítulo se dedica a presentar la aplicación de los ciclos fundamentales en el análisis de redes eléctricas.

## 7.4 Análisis de redes eléctricas

El comportamiento de una red eléctrica depende de las características de los elementos que la componen y de su topología, es decir, de la manera como estos elementos están interconectados. Es en este punto donde la teoría de grafos proporciona una herramienta matemática que permite el análisis sistemático. Esta aplicación de la teoría de grafos fue introducida por G. Kirchhoff en el año 1847 y en la actualidad tiene una gran importancia, dado que constituye la base de los programas para ordenador que permiten hacer el análisis automático de grandes redes eléctricas.

Sólo consideraremos redes  $RLC$  formadas por resistencias  $R$ , bobinas  $L$  y condensadores  $C$  además de fuentes de tensión y de corriente independientes. Esta formulación es suficientemente general, ya que cualquier elemento eléctrico con dos terminales, lineal, pasivo e invariante en el tiempo, puede ser modelado por una combinación de elementos  $R$ ,  $L$  y  $C$ .

Cada elemento  $R$ ,  $L$  o  $C$  de la red, lo representaremos por una arista  $e$  orientada de manera arbitraria. Asociadas con esta arista  $e$  tenemos las variables  $v(t)$  e  $i(t)$  que corresponden al valor de la tensión y la intensidad de la corriente en el elemento considerado y en el instante de tiempo  $t$ . El signo de estas variables se toma de acuerdo con la orientación de  $e$  tal como se indica en la figura 7.16. En cada elemento, la corriente y la tensión se relacionan de acuerdo con la ley física que gobierna su comportamiento. Así, en una resistencia se cumple la ley de Ohm  $v(t) = Ri(t)$ , en una bobina la ley de Faraday  $v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$  y en un condensador la tensión es proporcional a la carga eléctrica acumulada, es decir,  $v(t) = \frac{1}{C} \int i(\tau) d\tau$ , siendo  $R$ ,  $L$  y  $C$  los valores de la resistencia, la autoinducción y la capacidad respectivamente. La red resultante de

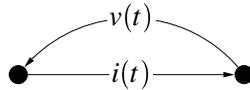


Figura 7.16: Variables  $v(t)$  e  $i(t)$

interconectar los diferentes elementos que la componen queda modelada por un digrafo  $G$ . Por el hecho de interconectar los elementos, se cumplen unas restricciones adicionales conocidas como *leyes de Kirchoff*.

**Ley de Kirchoff de las corrientes** Para cada vértice  $u$  de  $G$ , la suma algebraica de las corrientes que salen de  $u$  vale 0.

**Ley de Kirchoff de las tensiones** Para cada circuito  $C$  de  $G$ , la suma algebraica de las tensiones en las aristas de  $C$  vale 0.

### Análisis por ciclos

Sea  $\mathbf{B} = (b_{ij})$  la matriz de incidencia de  $G$ . La matriz  $\mathbf{B}$  es  $n \times m$  donde  $n$  y  $m$  son el orden y el tamaño de  $G$  respectivamente. Sea también  $\mathbf{i}(t) = (i_1(t), i_2(t), \dots, i_m(t))^T$  el vector que tiene por componentes las corrientes en cada arista. De acuerdo con la ley de Kirchoff de las corrientes, en el vértice  $r$ -ésimo de  $G$  se cumple  $\sum_{k=1}^m b_{rk} i_k(t) = 0$ , o bien matricialmente

$$\mathbf{B}\mathbf{i}(t) = \mathbf{0} \quad (7.1)$$

Por la ecuación 7.1, el vector  $\mathbf{i}(t)$  es ortogonal a cada vector fila de la matriz de incidencia  $\mathbf{B}$ . Tal como se ha explicado en la sección anterior (proposición 7.19), esto significa que  $\mathbf{i}(t)$  pertenece al subespacio de ciclos  $\mathcal{C}$  del espacio vectorial  $E = \mathbf{R}^m$  asociado a  $G$ . Sea  $\mu = m - n + 1$  el número de ciclos fundamentales de  $G$  respecto de un árbol generador  $T$ . Si  $\mathbf{C}_f$  es la matriz  $\mu \times m$  de ciclos fundamentales respecto de  $T$ , sus filas  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_\mu$  constituyen una base de  $\mathcal{C}$  y, por tanto,  $\mathbf{i}(t) = \sum_{k=0}^{\mu} i_{ck}(t) \mathbf{c}_k$ , siendo  $i_{c1}(t), i_{c2}(t), \dots, i_{c\mu}(t)$  los componentes del vector corriente  $\mathbf{i}(t)$ . Matricialmente:

$$\mathbf{i}(t) = \mathbf{C}_f^T \mathbf{i}_c(t) \quad (7.2)$$

donde  $\mathbf{i}_c(t)$  es el vector  $(i_{c1}(t), i_{c2}(t), \dots, i_{c\mu}(t))^T$ . Las corrientes  $i_{c1}(t), i_{c2}(t), \dots, i_{c\mu}(t)$  se llaman *corrientes de ciclo* y, por la ecuación 7.2, la corriente  $i_k(t)$  que atraviesa el elemento  $k$ -ésimo de la red es combinación lineal de las  $\mu$  corrientes de ciclo.

Substituyendo 7.2 en 7.1 tenemos la ley de Kirchoff de las corrientes expresada por las corrientes de ciclo:

$$\mathbf{B} \mathbf{C}_f^T \mathbf{i}_c(t) = \mathbf{0} \quad (7.3)$$

Consideremos ahora una red *RLC* en la cual todas las fuentes de energía sean generadores de tensión. Si  $\mathbf{e}_c(t) = (e_1(t), e_2(t), \dots, e_\mu(t))^T$  es el vector que tiene por componente  $k$ -ésimo la tensión suministrada por los generadores del  $k$ -ésimo ciclo fundamental  $\mathbf{c}_k$ , la ley de Kirchoff de las tensiones se puede formular como:

$$\mathbf{C}_f \mathbf{v}(t) = \mathbf{e}_c(t) \quad (7.4)$$

donde  $\mathbf{v}(t) = (v_1(t), v_2(t), \dots, v_m(t))^T$  es el vector tensión que tiene por componentes las tensiones en las aristas correspondientes a los elementos pasivos  $R, L$  y  $C$ .

Tal como se ha dicho antes, la tensión  $v_k(t)$  y la corriente  $i_k(t)$  se relacionan en cada elemento según la ley física que describe su comportamiento. Si  $V_k(s)$  e  $I_k(s)$  son las transformadas de Laplace de las variables  $v_k(t)$  e  $i_k(t)$  respectivamente, y suponemos que las condiciones iniciales de la red son nulas (es decir, para cada bobina  $i(0) = 0$  y para cada condensador  $v(0) = 0$ ), se puede escribir la siguiente ecuación matricial:

$$\mathbf{V}(s) = \mathbb{Z}(s) \mathbf{I}(s) \quad (7.5)$$

donde  $\mathbb{Z}(s)$  es la matriz diagonal  $m \times m$  llamada *matriz de impedancias*, tal que  $(\mathbb{Z}(s))_{kk} = Z_k(s)$  es la impedancia del elemento  $k$ -ésimo de la red. Así,  $V_k(s) = Z_k(s) I_k(s)$ , donde  $Z_k(s)$  es igual a  $R, Ls$  o  $\frac{1}{Cs}$ , según si el elemento considerado es una resistencia, una bobina o un condensador.

De la ecuación obtenida al transformar por Laplace la ecuación 7.4 y de 7.5:

$$\mathbf{C}_f \mathbb{Z}(s) \mathbf{I}(s) = \mathbf{E}_c(s) \quad (7.6)$$

Por otra parte, transformando la ecuación 7.2,  $\mathbf{i}(t) = \mathbf{C}_f^T \mathbf{i}_c(t)$ , y substituyendo en 7.6:

$$(\mathbf{C}_f \mathbb{Z}(s) \mathbf{C}_f^T) \mathbf{I}_c(s) = \mathbf{E}_c(s) \quad (7.7)$$

donde la matriz  $\mathbf{C}_f \mathbb{Z}(s) \mathbf{C}_f^T \equiv \mathbb{Z}_c(s)$  es  $\mu \times \mu$  y se llama *matriz de impedancias de ciclo*.

La solución del sistema 7.7 da las corrientes de ciclo y la ecuación 7.2 proporciona las corrientes en cada elemento de la red.

Finalmente, indicamos que, utilizando los cociclos fundamentales, se puede hacer el análisis de la red usando como variables independientes las tensiones de  $n - 1$  de los nodos respecto de un nodo de referencia. Naturalmente, este análisis es dual del presentado en esta sección.

## Notas históricas y bibliográficas

El trabajo original de Euler sobre el problema de los puentes de Königsberg se publicó en [7]. Curiosamente, Euler enuncia una de las implicaciones (si el grado de todos los vértices es par, el grafo tiene un circuito euleriano) sin demostrarla. Esta parte de la demostración no apareció publicada hasta 1873 en un artículo póstumo del joven matemático alemán Carl Hierholzer [11]. Tanto las circunstancias históricas de los dos trabajos como una transcripción al inglés de los textos originales se pueden encontrar en el libro de Biggs, Lloyd y Wilson sobre la historia de la teoría de grafos [4]. El lector que quiera profundizar más en el tema de los ciclos eulerianos en grafos y digrafos puede consultar por ejemplo [2].

El problema de las secuencias de de Bruijn fue introducido y tratado por este matemático holandés en 1946 en [5], donde presenta también los digrafos que llevan su nombre. La relación entre las secuencias de de Bruijn y los registros cíclicos de desplazamiento, así como también algunas de sus aplicaciones se pueden encontrar por ejemplo en [14]. Los digrafos de los cuales se derivan las secuencias tienen muchas propiedades interesantes que se discuten, por ejemplo, en [3], donde también hay un análisis de su aplicación al diseño de redes.

A pesar de que les dio el nombre, Hamilton no fue el primero en estudiar ciclos que pasan una única vez por cada vértice. El matemático inglés Kirkman había dirigido a la Royal Society el mismo problema para los grafos de los poliedros [12]. No obstante, Hamilton lo hizo popular, sobre todo porque inventó un juego de mesa basado en la existencia de ciclos hamiltonianos en el grafo del icosaedro, *The icosian game*, del cual estaba muy orgulloso, pero que fue un fracaso comercial. Nuevamente, el lector encontrará una excelente exposición histórica y transcripciones de los artículos originales en [4]. Sobre el estudio de ciclos hamiltonianos se puede encontrar un resumen extenso y bibliografía adicional en [2].

El problema del viajante es uno de los problemas de la algorítmica que ha hecho correr más tinta, no solamente por las aplicaciones que se derivan de su solución, sino también porque constituye un test de la eficacia de nuevos métodos en este área. Aunque se puede encontrar

una exposición relativamente completa en [8], hay libros enteramente dedicados al problema, como por ejemplo [13]. En la referencia anterior [8] se puede encontrar también el tratamiento algorítmico de los problemas de circuitos eulerianos y ciclos hamiltonianos.

Kirchoff enunció sus dos famosas leyes para el análisis de redes eléctricas a los 20 años cuando aún era estudiante de física. En [4] hay también una transcripción del trabajo original de Kirchoff y referencias históricas. En [6] hay una exposición completa de la aplicación de los ciclos y los cociclos fundamentales al análisis de redes eléctricas.

Como en el resto de capítulos de esta parte, el libro de Wilson [15] es una buena introducción de los temas que se tratan en este capítulo.

## Bibliografía

- [1] E. Aarts, J. Korst. *Simulated Annealing and Boltzmann Machines*, John Wiley & Sons, Chichester, 1989.
- [2] L. Beinecke, R. Wilson (Eds.). *Selected Topics in Graph Theory*, Academic Press, 1978.
- [3] J. C. Bermond, C. Peyrat. “De Bruijn and Kautz networks, a competition for the hypercube”, *Hypercube and Distributed Computers*, Elsevier Sc. Publ, North Holland, pp. 279–293, 1989.
- [4] N. L. Biggs, E. K. Lloyd, R. J. Wilson. *Graph Theory 1736–1936*, Oxford University Press, 1976.
- [5] N. G. de Bruijn. “A combinatorial problem”, *Koninklijke Nederlandse Academie van Wetenschappen Proc.*, **A49**, pp. 758–764, 1946.
- [6] N. Deo. *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*, Prentice Hall, 1974.
- [7] L. Euler. “Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis”, *Comentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, **8**, pp. 128–140, 1736.
- [8] A. Gibbons. *Algorithmic Graph Theory*, Cambridge University Press, 1985.
- [9] R. Gould. *Graph Theory*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., 1988.
- [10] D. E. Goldberg. *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*, Addison-Wesley, 1989.
- [11] C. Hierholzer. “Über die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechnung zu Umfahren”, *Mathematische Annalen*, **6**, pp. 30–32, 1873.

- [12] T.P. Kirkman., “On the representation of polyhedra”, *Philosophical Transactions of the Royal Society*, **146**, pp. 413–418, 1856.
- [13] L. Lawler, J. K. Lenstra (Eds.). *The Travelling Salesman Problem*, John Wiley & Sons, 1987.
- [14] H. Stone. *Discrete Mathematical Structures and their Applications*, SRA Computer Science Series, 1974.
- [15] R. Wilson. *Introducción a la Teoría de Grafos*, Alianza Universidad, vol. 367, 1983.

## Problemas

1. Estudiar si los grafos siguientes son eulerianos:
  - (a) El grafo completo de cuatro y el de cinco vértices
  - (b) El grafo del cubo
  - (c) El grafo de Petersen
2. ¿Para qué valores de  $n$  el grafo completo de  $n$  vértices es euleriano?
3. Estudiar para qué valores de  $n$  y  $m$  los grafos bipartitos completos  $K_{n,m}$  son eulerianos.
4. ¿Cuántas veces (como mínimo) se tiene que alzar el lápiz del papel para dibujar la figura 7.17 sin repetir ninguna línea?

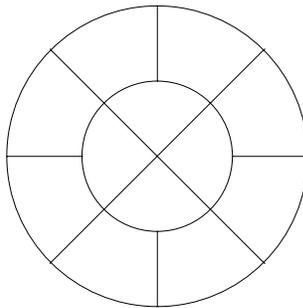


Figura 7.17:

5. Las autoridades actuales de la antigua ciudad de Königsberg han decidido finalmente construir los puentes que sea preciso para satisfacer el antiguo capricho de sus habitantes. ¿Cuántos han de construir como mínimo y dónde es preciso ponerlos?

6. Demostrar que un multidigrafo  $G$  es euleriano si y sólo si es fuertemente conexo (salvo vértices aislados) y para todo  $x \in V(G)$ ,  $d^+(x) = d^-(x)$  (teorema 7.4).
7. Demostrar que un multidigrafo  $G$  contiene un camino euleriano desde el vértice  $u$  hasta el vértice  $v$ ,  $u \neq v$  si y sólo si el multidigrafo subyacente es conexo (salvo vértices aislados), y para todo  $x \in V(G) \setminus \{u, v\}$ ,  $d^+(x) = d^-(x)$ , mientras que  $d^+(u) = d^-(u) + 1$  y  $d^-(v) = d^+(v) + 1$  (teorema 7.5).
8. *Problema del cartero chino.* Un cartero tiene que recorrer todas las calles de su pueblo para repartir las cartas. Si el mapa del pueblo es el de la figura 7.18, proponer un recorrido para el cartero saliendo de la oficina de correos (señalada con un cuadrado negro) y volviendo a la oficina de correos de manera que la distancia recorrida sea mínima.

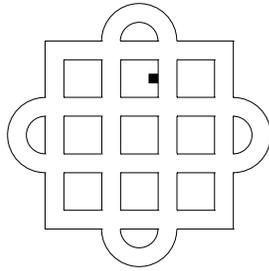


Figura 7.18:

9. Una modificación del procedimiento *RecorrerCamino* del algoritmo *Euler* es la siguiente: Si  $G = (V, E)$  es el grafo original, en cada paso sea  $G'$  el grafo con conjunto de vértices  $V$  (los del grafo original) y aristas, todas las aristas aún no consideradas del grafo original. Ahora, en lugar de escoger una arista no usada cualquiera a partir del punto actual, se escoge una arista tal que su exclusión del grafo no incrementa el número de componentes no triviales del grafo  $G'$ . Si no hay ninguna arista de este tipo se considera una arista cualquiera, el algoritmo así modificado es conocido como *algoritmo de Fleury*. Aplicar el algoritmo de Fleury al grafo de la figura 7.4.
10. Existe un teorema que dice: Si  $G$  tiene un circuito euleriano, entonces el algoritmo de Fleury lo encuentra. Es decir, con este algoritmo, no es preciso hacer llamadas recursivas. El algoritmo no acaba hasta que se ha pasado por todas las aristas. Demostrar el teorema.  
*Indicación:* Mostrar que, si  $G$  tiene un circuito euleriano, entonces la única vez en que no hay una arista desde el vértice actual  $v$ , cuya exclusión no incrementa el número de

componentes del grafo, es cuando el grado de  $v$  en  $G'$  es 1. Esto significa que cuando no hay aristas libres incidentes en el vértice considerado, no las hay en ninguna parte. ¿Por qué? ¿Por qué esto es importante?

11. *Problema del hotel de Baltimore.* En el hotel Hilton de Baltimore no hay llaves en las puertas de las habitaciones, sino cerraduras electrónicas que se abren tecleando un código secreto de cinco dígitos (0 o 1). Un malhechor quiere entrar en la habitación de Madame Castafiore para robarle las joyas, y teclea todos los números de cinco cifras desde 00000 hasta 11111, o sea, que teclea 160 cifras. Demostrar que habría podido abrir la puerta con una quinta parte de cifras y dar la secuencia que es preciso teclear.
12. *Problema de la localización de la posición de un disco.* Para localizar la posición de un disco magnético, se inscriben bits (ceros o unos) de manera que una lectora lee cuatro dígitos consecutivos. ¿Cuántos dígitos se pueden registrar y en qué orden para que cada posición de la lectora corresponda a una posición diferente del disco?

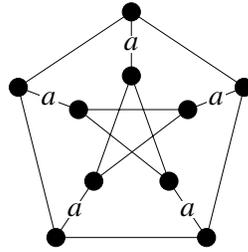


Figura 7.19: El grafo de Petersen

13. Demostrar que el grafo de Petersen (en la figura 7.19) no es hamiltoniano, pero que el grafo que se obtiene suprimiendo uno cualquiera de los vértices lo es. (Un grafo con esta propiedad se dice que es *hipohamiltoniano*. El de Petersen es el grafo hipohamiltoniano más pequeño en número de vértices.)

*Indicación:* ¿Cuántas aristas de tipo  $a$  tendría que tener un ciclo hamiltoniano en un grafo de Petersen?

14. En los grafos dibujados en la figura 7.20 mostrar que:
  - (a) El grafo (a) es hamiltoniano
  - (b) El grafo (b) es hamiltoniano
  - (c) El grafo (c) no es hamiltoniano

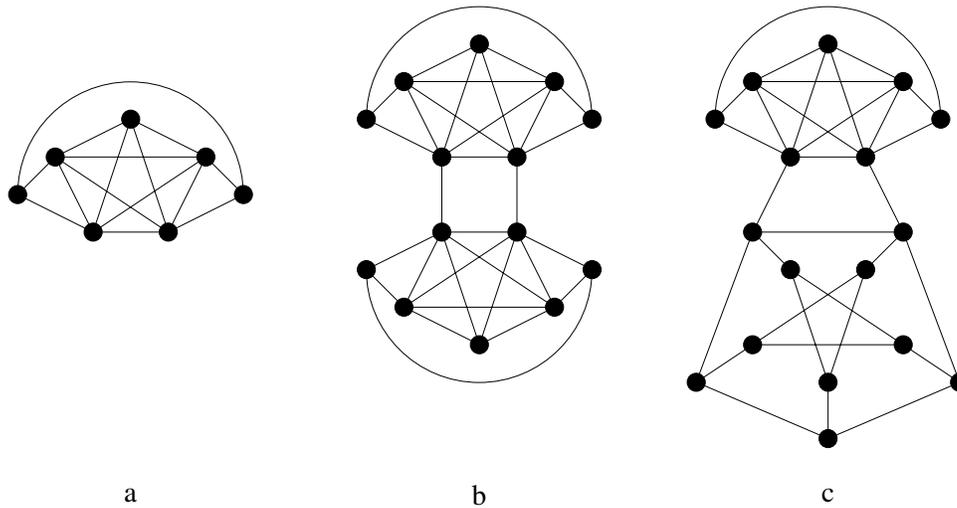


Figura 7.20:

15. (a) Demostrar que un grafo bipartito de orden impar no es hamiltoniano.  
 (b) Demostrar que un grafo bipartito con conjuntos estables  $U$  y  $V$  no puede ser hamiltoniano si  $|U| \neq |V|$ .  
 (c) Determinar qué grafos bipartitos completos son hamiltonianos.
16. El origen real del estudio de los grafos hamiltonianos proviene del viejo problema de determinar si con el movimiento del caballo se pueden recorrer todos los cuadros de un tablero de ajedrez pasando por cada uno una única vez. La respuesta es que sí para un tablero de  $8 \times 8$  cuadros (Vandermonde, 1771; Kirkman, 1856). Considerar un grafo que represente el problema y demostrar que, si el tablero es de  $5 \times 5$  cuadros, la respuesta es que no.
17. (a) Demostrar que el grafo completo  $K_n$  con  $n$  impar se puede descomponer en  $n - 2$  caminos hamiltonianos disyuntos en aristas.  
 (b) Demostrar que el grafo completo  $K_n$  con  $n$  par se puede descomponer en  $n$  ciclos hamiltonianos disyuntos en aristas.
18. Demostrar que cada ciclo  $C$  tiene con cada cociclo  $S$  un número par de aristas en común.
19. Demostrar que la suma  $\oplus$  de cociclos es también un cociclo o es la unión de cociclos disyuntos en aristas.

- 
20. Demostrar el teorema 7.18: Cada cuerda  $c$ , que determina el ciclo fundamental  $C_c$ , aparece en cada cociclo fundamental asociado con las aristas (respecto de  $T$ ) de  $C_c$ , y  $c$  no aparece en ningún otro cociclo fundamental.
  21. Demostrar que, en un grafo conexo  $G$ , un vértice  $v$  es de corte si y sólo si existen dos aristas  $e$  y  $e'$  incidentes con  $v$  y tales que ningún ciclo de  $G$  las contiene a las dos.

## Capítulo 8

# Flujos, conectividad y apareamientos

1. Redes de transporte
2. El teorema del flujo máximo–corte mínimo
3. Conectividad
4. Los teoremas de Menger
5. Apareamientos en grafos bipartitos
6. El teorema de Hall

En este capítulo se estudian tres temas aparentemente no relacionados, pero que, como se verá, poseen un vínculo estrecho. Se comienza, en la sección 1, estudiando los flujos en redes de transporte, cuestión de gran aplicación a ciertos problemas de investigación operativa. En primer lugar, se definen los conceptos de red de transporte, de valor del flujo y de capacidad de un corte. Después de establecer que el valor del flujo es menor o igual que la capacidad de cualquier corte, se demuestra en la sección 2 el clásico teorema del flujo máximo–corte mínimo y se presenta el algoritmo de Ford y Fulkerson, que permite encontrar el flujo máximo en la red.

En las secciones 3 y 4 del capítulo se estudian los importantes conceptos de conectividad y arista-conectividad. Cuando el grafo que se considera modela una red de interconexión, las conectividades constituyen medidas de la vulnerabilidad de la red ante el fallo de nodos y/o enlaces. Los teoremas de Menger constituyen los resultados clásicos sobre conectividad y relacionan las conectividades locales con el número máximo de caminos internamente disyuntos en el grafo. Se presenta la relación estrecha que hay entre estos teoremas y el teorema del flujo máximo–corte mínimo.

En las últimas secciones del capítulo se presenta otro de los resultados básicos de la teoría de grafos y la combinatoria: el teorema de Hall. Este resultado proporciona la condición

necesaria y suficiente para que se puedan aparear los vértices de un grafo bipartito. El teorema de Hall constituye, también, el resultado principal de la teoría transversal de conjuntos, y se aplica a problemas de asignación de tareas. La demostración que se presenta del teorema de Hall usa, de nuevo, el teorema del flujo máximo–corte mínimo.

## 8.1 Redes de transporte

En ciertas aplicaciones interesa determinar el flujo máximo (de un fluido, datos, etc) que fluye a través de una red desde un cierto nodo  $s$  hasta otro nodo  $t$ , cuando los enlaces de la red tienen una capacidad limitada de transmisión del flujo. El modelo que proporciona la teoría de grafos para resolver este problema lo constituyen las llamadas redes de transporte.

Una *red de transporte*  $X = (G, s, t, c)$  es un digrafo  $G = (V, A)$  con dos vértices distinguidos,  $s$  y  $t$ , y una función  $c$  llamada *capacidad* que asigna a cada arco  $a = (u, v) \in A(G)$  un valor entero no negativo  $c(a) = c(u, v)$  llamado la capacidad del arco  $a$ .

Dada una red de transporte  $X$ , una función  $\phi : A \rightarrow \mathbb{Z}$  que cumple

$$0 \leq \phi(a) = \phi(u, v) \leq c(a) \quad \text{para cada } a = (u, v) \in A(G) \quad (8.1)$$

y

$$\sum_{v \in \Gamma^+(u)} \phi(u, v) = \sum_{v \in \Gamma^-(u)} \phi(v, u) \quad \text{para cada } u \in V(G) - \{s, t\} \quad (8.2)$$

se llama un *flujo* en  $X$ . Diremos también que  $\phi(a)$  es el flujo que atraviesa el arco  $a$ .

La condición 8.1 acota el flujo que atraviesa un arco determinado por su capacidad. Por otra parte, dado  $u \in V(G)$  diremos que

$$\sum_{v \in \Gamma^+(u)} \phi(u, v) - \sum_{v \in \Gamma^-(u)} \phi(v, u)$$

es el *flujo neto saliente* de  $u$  y, análogamente,

$$\sum_{v \in \Gamma^-(u)} \phi(v, u) - \sum_{v \in \Gamma^+(u)} \phi(u, v)$$

es el *flujo neto entrante* en  $u$ , entonces la condición 8.2 es una condición de equilibrio que dice que el flujo neto saliente de (o entrante en) cada vértice  $u$  diferente de  $s$  y  $t$  vale cero. En la figura 8.1 se representa una red de transporte con un flujo asociado. El primero de los dos valores indicados en cada arco  $a$  es  $c(a)$  y el segundo es  $\phi(a)$ .

**Ejercicio 8.1.** Demostrar que toda red de transporte admite al menos un flujo.

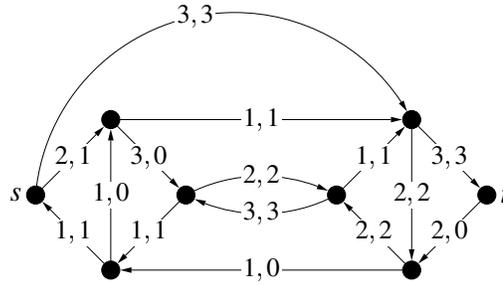


Figura 8.1: Red de transporte

El valor del flujo,  $\text{val}(\phi)$ , se define por

$$\text{val}(\phi) = \sum_{v \in \Gamma^+(s)} \phi(s, v) - \sum_{v \in \Gamma^-(s)} \phi(v, s) \quad (8.3)$$

y corresponde al flujo neto saliente del vértice  $s$ . De hecho, el valor del flujo es también el flujo neto entrante en  $t$ .

**Proposición 8.2.** Dada una red de transporte  $X$  y un flujo  $\phi$  en la red, se cumple

$$\text{val}(\phi) = \sum_{v \in \Gamma^+(s)} \phi(s, v) - \sum_{v \in \Gamma^-(s)} \phi(v, s) = \sum_{v \in \Gamma^-(t)} \phi(v, t) - \sum_{v \in \Gamma^+(t)} \phi(t, v)$$

*Demostración.* Sea  $G = (V, A)$  el digrafo correspondiente a  $X$ . Se cumple

$$\sum_{u \in V} \sum_{v \in \Gamma^+(u)} \phi(u, v) = \sum_{u \in V} \sum_{v \in \Gamma^-(u)} \phi(v, u) \quad (8.4)$$

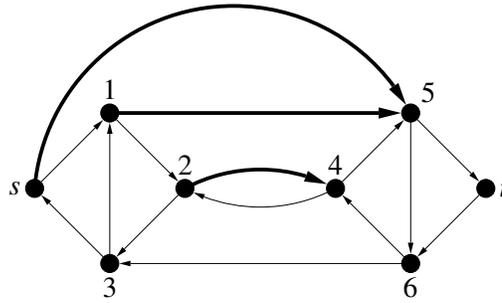
ya que cada lado de esta igualdad es  $\sum_{a \in A} \phi(a)$ . Aplicando la condición 8.2, la igualdad anterior es, simplemente:

$$\sum_{v \in \Gamma^+(s)} \phi(s, v) + \sum_{v \in \Gamma^+(t)} \phi(t, v) = \sum_{v \in \Gamma^-(s)} \phi(v, s) + \sum_{v \in \Gamma^-(t)} \phi(v, t)$$

de donde se obtiene el resultado enunciado.  $\square$

En la red de la figura 8.1, el valor del flujo es 3.

Dado  $S \subset V$ , denotamos por  $(S, \bar{S})$  el conjunto de todos los arcos  $(u, v)$  con  $u \in S$  y  $v \in \bar{S}$ , donde  $\bar{S} = V \setminus S$ . Un  $s$ - $t$  corte es un conjunto  $F = (S, \bar{S})$  tal que  $s \in S$  y  $t \in \bar{S}$ . La suma  $\sum_{a \in F} c(a)$  de las capacidades de los arcos que forman  $F$  es la capacidad  $c(F)$  del  $s$ - $t$  corte. Por ejemplo, la figura 8.2 muestra un  $s$ - $t$  corte de capacidad 6 para la red de transporte de la figura 8.1, donde  $S = \{s, 1, 2, 3\}$  y  $\bar{S} = \{4, 5, 6, t\}$ .

Figura 8.2:  $s-t$  corte

Dado un  $s-t$  corte  $F = (S, \bar{S})$ , sea  $\bar{F}$  el conjunto de arcos  $(\bar{S}, S)$ .

Notemos que un  $s-t$  corte  $F$  desconecta  $G$  en el sentido que  $G - F$  no contiene ningún camino dirigido de  $s$  hacia  $t$ . Por ello, se cumple el resultado siguiente:

**Proposición 8.3.** Sea  $X$  una red de transporte,  $\phi$  un flujo en  $X$  y  $F$  un  $s-t$  corte. Entonces,  $\text{val}(\phi) \leq c(F)$ .

*Demostración.* Sumando para todos los vértices de  $S$  el flujo neto saliente de cada uno de estos vértices, se obtiene, teniendo en cuenta que  $s \in S, t \in \bar{S}$  y las ecuaciones 8.2 y 8.3:

$$\text{val}(\phi) = \sum_{u \in S} \left( \sum_{v \in \Gamma^+(u)} \phi(u, v) - \sum_{v \in \Gamma^-(u)} \phi(v, u) \right) \quad (8.5)$$

Sea  $G_S$  el subgrafo dirigido inducido por  $S$ , es decir,  $V(G_S) = S$  y  $(u, v) \in A(G_S)$  si y sólo si  $(u, v) \in A(G)$ . Tenemos:

$$\sum_{u \in S} \sum_{v \in \Gamma^+(u)} \phi(u, v) = \sum_{a \in A(G_S)} \phi(a) + \sum_{a \in F} \phi(a)$$

Análogamente,

$$\sum_{u \in S} \sum_{v \in \Gamma^-(u)} \phi(v, u) = \sum_{a \in A(G_S)} \phi(a) + \sum_{a \in \bar{F}} \phi(a)$$

Por tanto, a partir de la ecuación 8.5 y aplicando la condición 8.1:

$$\text{val}(\phi) = \sum_{a \in F} \phi(a) - \sum_{a \in \bar{F}} \phi(a) \leq \sum_{a \in F} \phi(a) \leq \sum_{a \in F} c(a) = c(F) \quad (8.6)$$

□

## 8.2 El teorema del flujo máximo–corte mínimo

Un *flujo máximo* en una red de transporte  $X$  es un flujo  $\phi$  con la propiedad que  $\text{val}(\phi) \geq \text{val}(\phi')$ , siendo  $\phi'$  cualquier otro flujo en la red. Dado que el número de flujos que podemos definir en  $X$  es finito, siempre existe un flujo máximo.

Un  $s$ – $t$  corte  $F$  se dice que es un *corte mínimo* si  $c(F) \leq c(F')$  para cualquier otro  $s$ – $t$  corte  $F'$ . Notemos que, si  $\phi$  y  $F$  son un flujo y un corte en  $X$  tales que  $\text{val}(\phi) = c(F)$ , entonces, por la proposición 8.3,  $\phi$  es un flujo máximo y  $F$  es un corte mínimo. Un caso particular en que esto sucede lo da el resultado siguiente:

**Lema 8.4.** Sea  $\phi$  un flujo en  $X$  y  $F$  un  $s$ – $t$  corte. Si  $\phi(a) = c(a)$  para todo  $a \in F$  y  $\phi(a) = 0$  para todo  $a \in \bar{F}$ , entonces  $\phi$  es un flujo máximo y  $F$  es un corte mínimo.

*Demostración.* Por 8.6,

$$\text{val}(\phi) = \sum_{a \in F} \phi(a) - \sum_{a \in \bar{F}} \phi(a) = \sum_{a \in F} c(a) = c(F)$$

□

El resultado más importante sobre redes de transporte lo da el teorema siguiente, debido a Ford y Fulkerson y conocido también como el teorema del flujo máximo–corte mínimo.

**Teorema 8.5.** En cualquier red de transporte, el valor de un flujo máximo es igual a la capacidad de un corte mínimo.

*Demostración.* Sea  $\phi$  un flujo máximo en la red de transporte  $X = (G, s, t, c)$  que se considera. Demostremos la existencia de un  $s$ – $t$  corte  $F$  que cumple las condiciones enunciadas en el lema anterior, es decir,  $\phi(a) = c(a)$  para todo  $a \in F$  y  $\phi(a) = 0$  para todo  $a \in \bar{F}$ .

Sea  $S \subset V(G)$  definido recursivamente por las condiciones siguientes:

- (a)  $s \in S$ ;
- (b) si  $u \in S$  y  $\phi(u, v) < c(u, v)$ , entonces  $v \in \Gamma^+(u)$  pertenece a  $S$ ;
- (c) si  $u \in S$  y  $\phi(v, u) > 0$ , entonces  $v \in \Gamma^-(u)$  pertenece a  $S$ .

Demostremos que  $t \notin S$ . En efecto, si fuese  $t \in S$ , tendría que existir una secuencia  $P$  de vértices distintos

$$s = u_0, u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_{n-1}, u_n = t \quad (8.7)$$

donde, o bien  $(u_{k-1}, u_k) \in A(G)$  y  $\phi(u_{k-1}, u_k) < c(u_{k-1}, u_k)$ , o bien  $(u_k, u_{k-1}) \in A(G)$  y  $\phi(u_k, u_{k-1}) > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Denominamos  $P$  una *secuencia de aumento* y denotamos por



Figura 8.3: Secuencia de aumento

$A(P)$  el conjunto de arcos correspondientes; ver la figura 8.3. En el primer caso, cuando  $a = (u_{k-1}, u_k) \in A(G)$  y  $\phi(a) < c(a)$ , sea  $\varepsilon_k = c(a) - \phi(a)$ . De otro modo, cuando  $a = (u_k, u_{k-1}) \in A(G)$  y  $\phi(a) > 0$ , sea  $\varepsilon_k = \phi(a)$ . Sea  $\varepsilon = \min_k \varepsilon_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Ahora, definimos una función  $\phi'$  en  $A(G)$  de la forma siguiente:

$$\phi'(a) = \begin{cases} \phi(a) + \varepsilon & \text{si } a = (u_{k-1}, u_k) \in A(P) \text{ para algún } k, 1 \leq k \leq n; \\ \phi(a) - \varepsilon & \text{si } a = (u_k, u_{k-1}) \in A(P) \text{ para algún } k, 1 \leq k \leq n; \\ \phi(a) & \text{si } a \notin A(P). \end{cases} \quad (8.8)$$

Claramente se cumple  $0 \leq \phi'(a) \leq c(a)$  para todo  $a \in A(G)$  y, por tanto,  $\phi'$  verifica la condición 8.1. Es fácil comprobar que  $\phi'$  también verifica la condición 8.2 y, por tanto,  $\phi'$  es un flujo en  $X$ . Supongamos, por ejemplo, que para algún  $k$ ,  $1 \leq k \leq n-1$ , se tuviese  $(u_{k-1}, u_k) \in A(P)$  y  $(u_k, u_{k+1}) \in A(P)$ . Entonces, si  $u = u_k$ ,

$$\sum_{v \in \Gamma^+(u)} \phi'(u, v) = \phi(u, u_{k+1}) + \varepsilon + \sum \phi(u, v)$$

donde la última suma se extiende a todos los vértices  $v$  adyacentes desde  $u$  que no pertenecen a  $P$ . Análogamente,

$$\sum_{v \in \Gamma^-(u)} \phi'(v, u) = \phi(u_{k-1}, u) + \varepsilon + \sum \phi(v, u)$$

donde, ahora, la última suma se extiende a todos los vértices  $v$  adyacentes hacia  $u$  que no pertenecen a  $P$ . Por tanto,  $\sum_{v \in \Gamma^+(u)} \phi'(u, v) = \sum_{v \in \Gamma^-(u)} \phi'(v, u)$ . De la misma forma se comprueba que la condición 8.2 se cumple en las otras situaciones posibles: cuando, para algún  $k$ ,  $1 \leq k \leq n-1$ , se tiene  $(u_k, u_{k-1}) \in A(P)$  y  $(u_{k+1}, u_k) \in A(P)$ , o cuando, para algún  $k$ ,  $1 \leq k \leq n-1$ ,  $u_k$  es adyacente hacia (desde)  $u_{k-1}$  y  $u_{k+1}$ .

Calculemos  $\text{val}(\phi')$ . Si  $s = u_0$  es adyacente hacia  $u_1$ , entonces

$$\begin{aligned} \text{val}(\phi') &= \sum_{v \in \Gamma^+(s)} \phi'(s, v) - \sum_{v \in \Gamma^-(s)} \phi'(v, s) \\ &= \sum_{v \in \Gamma^+(s) - \{u_1\}} \phi(s, v) + (\phi(s, u_1) + \varepsilon) - \sum_{v \in \Gamma^-(s)} \phi(v, s) \\ &= \sum_{v \in \Gamma^+(s)} \phi(s, v) - \sum_{v \in \Gamma^-(s)} \phi(v, s) + \varepsilon \\ &= \text{val}(\phi) + \varepsilon \end{aligned}$$

De la misma forma,  $\text{val}(\phi') = \text{val}(\phi) + \varepsilon$  si  $s = u_0$  es adyacente desde  $u_1$ . En cualquier caso, se llega a la contradicción que  $\phi$  no es un flujo máximo. Por tanto, en contra de lo que se había supuesto, el vértice  $t$  no pertenece al conjunto  $S$ .

Así, el conjunto de arcos  $F = (S, \bar{S})$  es un  $s$ - $t$  corte. Sin embargo, por la definición de  $S$ ,  $\phi(a) = c(a)$  para todo  $a \in F$  y  $\phi(a) = 0$  para todo  $a \in \bar{F}$ . Por el lema 8.4,  $F$  tiene capacidad mínima.  $\square$

**Ejercicio 8.6.** Completar la comprobación que el flujo  $\phi'$  cumple la condición 8.2.

La demostración anterior proporciona un método de obtención de un flujo máximo en una red de transporte. El algoritmo, también debido a Ford y Fulkerson, construye recursivamente y comenzando con un flujo dado (por ejemplo, el flujo nulo) una secuencia de flujos que acaba en un flujo máximo.

---

**Entrada:**  $X = (G, s, t, c)$ : una red de transporte.

**Algoritmo** FORD Y FULKERSON

1. Etiquetar  $s$  con  $(-, \infty)$ .
2. Repetir los pasos 3 y 4 mientras se pueda o hasta que  $t$  quede etiquetado.
3. Si  $v$  es un vértice no etiquetado adyacente desde un vértice etiquetado  $u$  y  $\phi(u, v) < c(u, v)$ , **entonces** etiquetar  $v$  con  $(u^+, \varepsilon(v))$  donde  $\varepsilon(v) = \min\{\varepsilon(u), c(u, v) - \phi(u, v)\}$ .
4. Si  $v$  es un vértice no etiquetado adyacente hacia un vértice etiquetado  $u$  y  $\phi(v, u) > 0$ , **entonces** etiquetar  $v$  con  $(u^-, \varepsilon(v))$  donde  $\varepsilon(v) = \min\{\varepsilon(u), \phi(v, u)\}$ .
5. Si  $t$  ha quedado etiquetado, **entonces**, volviendo hacia atrás a partir de  $t$ , se encuentra una secuencia de aumento  $P: s = u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, u_n = t$  donde, para  $1 \leq k \leq n$ ,  $u_k$  está etiquetado  $(u_{k-1}^+, \varepsilon(u_k))$  si  $(u_{k-1}, u_k) \in A(P)$  y  $u_k$  está etiquetado  $(u_{k-1}^-, \varepsilon(u_k))$  si  $(u_k, u_{k-1}) \in A(P)$ .
  - 5.1. En el primer caso, cambiar  $\phi(u_{k-1}, u_k)$  por  $\phi(u_{k-1}, u_k) + \varepsilon(t)$ .
  - 5.2. En el segundo caso, cambiar  $\phi(u_k, u_{k-1})$  por  $\phi(u_k, u_{k-1}) - \varepsilon(t)$ .
  - 5.3. Borrar las etiquetas y volver al paso 1.
6. Si  $t$  no ha quedado etiquetado, entonces  $\phi$  es un flujo máximo.

**Salida:**  $\phi$ : un flujo máximo.

---

**Ejercicio 8.7.** Aplicar el algoritmo de Ford y Fulkerson a la red de transporte de la figura 8.1.

Las definiciones de capacidad y flujo pueden ser generalizadas para permitir valores reales no negativos. En este caso, el teorema del flujo máximo–corte mínimo es aún válido, pero puede ocurrir que el algoritmo descrito no converja hacia un flujo máximo.

En algunas aplicaciones, en lugar de considerar un único vértice  $s$  y un único vértice  $t$ , conviene considerar conjuntos disyuntos  $S$  y  $T$  y definir ahora el valor del flujo como

$$\text{val}(\phi) = \sum_{a \in (S, \bar{S})} \phi(a) - \sum_{a \in (\bar{S}, S)} \phi(a) \quad (8.9)$$

Naturalmente, la condición de equilibrio 8.2 sólo se tiene que cumplir ahora para los vértices del conjunto  $V(G) - (S \cup T)$ . Esta situación se reduce a la aquí considerada si añadimos dos nuevos vértices  $s, t$  de tal forma que  $s$  sea adyacente hacia cada vértice  $x$  de  $S$ ,  $t$  sea adyacente desde cada vértice  $y$  de  $T$  y, además,  $c(s, x) = M$ , para cada  $x \in S$  y  $c(y, t) = M$  para cada  $y \in T$ , siendo  $M$  un entero suficientemente grande. Se deja como ejercicio que el lector complete los detalles.

**Ejercicio 8.8.** Demostrar que una forma equivalente de la expresión 8.9 es:

$$\text{val}(\phi) = \sum_{a \in (\bar{T}, T)} \phi(a) - \sum_{a \in (T, \bar{T})} \phi(a)$$

### 8.3 Conectividad

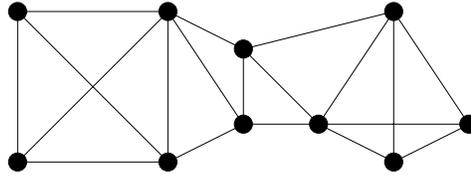
Sea  $G \neq K_n$  un grafo no dirigido. La *conectividad*  $\kappa(G)$  de  $G$  es el mínimo número de elementos de un conjunto  $S \subset V(G)$  tal que  $G - S$  es no conexo. Por ejemplo, si  $G$  es conexo y tiene un vértice de corte, entonces  $\kappa(G) = 1$ . Se excluyen los grafos completos de esta definición, dado que  $K_n$  es el único grafo de orden  $n$  que no puede ser desconectado eliminando vértices. Como la supresión de  $n - 1$  vértices cualesquiera reduce  $K_n$  al grafo trivial  $K_1$  constituido por un único vértice, se define, en este caso,  $\kappa(K_n) = n - 1$ .

Diremos también que  $G$  es  $k$ -conexo si  $\kappa(G) \geq k$ . Así, si  $G$  es  $k$ -conexo, entonces  $G = K_{k+1}$  o  $G$  tiene al menos  $k + 2$  vértices y ningún subconjunto  $S$  de menos de  $k$  vértices lo desconecta (es decir,  $G - S$  es aún conexo).

Análogamente, la *arista-conectividad*  $\lambda(G)$  de un grafo  $G \neq K_1$  es la mínima cardinalidad de un conjunto  $F \subset E(G)$  tal que  $G - F$  es no conexo. Por definición,  $\lambda(K_1) = 0$ . Como en el caso de vértices,  $G$  es  $k$ -arista-conexo si  $\lambda(G) \geq k$ .

Por ejemplo, el grafo de la figura 8.4 tiene conectividad 2 y arista-conectividad 3.

Tal como se ha dicho en la introducción del capítulo, cuando el grafo que se considera modela una red de interconexión, las conectividades constituyen medidas de la vulnerabilidad de la red ante el fallo de nodos y/o enlaces.

Figura 8.4:  $\kappa(G) = 2, \lambda(G) = 3$ 

La eliminación de una arista  $uv$  no supone la eliminación de sus vértices terminales  $u$  y  $v$ . En cambio, si  $u \in V(G)$ , entonces el subgrafo  $G - u$  no contiene ni el vértice suprimido  $u$  ni las aristas incidentes con este vértice. Estas consideraciones justifican la desigualdad  $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ . Por otra parte, si  $u$  es un vértice con grado  $\delta = \delta(G)$  (el grado mínimo del grafo), la eliminación de las  $\delta$  aristas incidentes con  $u$  dejan  $u$  desconectado del resto del grafo. Por tanto,  $\lambda(G) \leq \delta(G)$ . Así, se tiene el siguiente teorema, la demostración del cual dejamos como ejercicio.

**Teorema 8.9.** Para todo grafo  $G$ ,

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

Cuando  $G$  es 1-conexo, existe un camino entre cada par de vértices del grafo. La extensión de este resultado a grafos  $n$ -conexos,  $n \geq 1$ , constituye el teorema de Whitney. Consideremos antes, sin embargo, dos resultados clásicos sobre conectividad: los teoremas de Menger.

## 8.4 Los teoremas de Menger

Sean  $u$  y  $v$  vértices no adyacentes de un grafo  $G$ . Se dice que  $S \subset V(G)$  es un conjunto  $u-v$  *separador* si  $G - S$  es no conexo y  $u$  y  $v$  pertenecen a componentes distintos de  $G - S$ . Es decir,  $S$  es un conjunto  $u-v$  *separador*,  $u, v \in V(G) \setminus S$ , si y sólo si cada camino entre  $u$  y  $v$  contiene algún elemento de  $S$ .

Análogamente, dados dos vértices cualesquiera de  $G$ ,  $F \subset E(G)$  es un conjunto  $u-v$  *arista-separador* si  $G - F$  es no conexo y  $u$  y  $v$  pertenecen a componentes distintos de  $G - F$ .

Dados dos caminos entre  $u$  y  $v$ , diremos que son *internamente disyuntos* si los únicos vértices que tienen en común son precisamente los vértices terminales  $u$  y  $v$ . De forma similar, dos caminos entre  $u$  y  $v$  son *arista-disyuntos* si no tienen aristas en común.

Los teoremas de Menger relacionan el número mínimo de elementos que tiene que tener un conjunto que separe dos vértices dados con el número máximo de caminos disyuntos entre

estos vértices. La demostración que presentaremos usará el teorema del flujo máximo–corte mínimo. Comenzamos enunciando el teorema relativo a aristas:

**Teorema 8.10.** Sean  $u$  y  $v$  vértices de  $G$ . El número mínimo de aristas de un conjunto  $u$ – $v$  arista-separador es igual al número máximo de caminos arista-disyuntos entre  $u$  y  $v$ .

*Demostración.* Podemos suponer que  $G$  es conexo. Sea  $m$  el número máximo de caminos arista-disyuntos entre  $u$  y  $v$  y sea  $n$  el número mínimo de aristas de un conjunto  $u$ – $v$  arista-separador. Claramente,

$$n \geq m \quad (8.10)$$

Asociamos a  $G$  una cierta red de transporte  $X = (G^*, u, v, c)$ . El digrafo  $G^*$  correspondiente a  $X$  es el digrafo simétrico asociado a  $G$  y se obtiene a partir de  $G$  de la forma siguiente:  $V(G^*) = V(G)$ , y si  $xy \in E(G)$  entonces  $(x, y), (y, x) \in A(G^*)$ . Ver la figura 8.5. La función

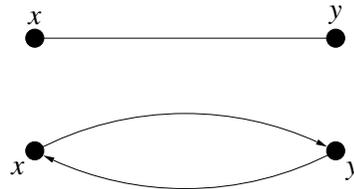


Figura 8.5: Obtención del digrafo  $G^*$  asociado a  $G$

capacidad  $c$  toma el valor  $c(a) = 1$  para todo  $a \in A(G^*)$ .

Si  $F$  es un  $u$ – $v$  corte en  $G^*$ , entonces las aristas correspondientes constituyen en  $G$  un conjunto  $u$ – $v$  arista-separador. Por tanto,

$$n \leq |F| = c(F) \quad (8.11)$$

En  $G^*$  existen  $m$  caminos dirigidos (sin arcos comunes) de  $u$  hacia  $v$ . Si  $\psi$  es una función que asigna valor 1 a cada arco de estos caminos dirigidos y asigna valor 0 a los arcos restantes de  $G^*$ , entonces  $\psi$  es un flujo en  $X$  de valor  $m$ . Así, si  $\phi$  es un flujo máximo en  $X$ , entonces  $\text{val}(\phi) \geq m$ . Por otra parte, sea  $\phi$  un flujo máximo. Para cada  $a \in A(G^*)$ ,  $\phi(a)$  vale 1 o 0. Sea  $D$  el subgrafo dirigido de  $G^*$  definido por los arcos  $a$  tales que  $\phi(a) = 1$ . En  $D$  debe existir al menos un camino desde  $u$  hasta  $v$  (¿por qué?). Como  $\phi$  es un flujo, la condición 8.2 implica  $d^+(w) = d^-(w)$  para todo  $w \in V(D) - \{u, v\}$ , y, por la proposición 8.2, se cumple  $d^+(u) - d^-(u) = d^-(v) - d^+(v) = \text{val}(\phi)$ , donde los grados indicados se consideran en  $D$ .

Estas condiciones implican la existencia en  $D$ , y por tanto en  $G^*$ , de  $\text{val}(\phi)$  caminos desde  $u$  hasta  $v$  disjuntos en arcos (demostrarlo como ejercicio; ver el teorema 7.5). Así,  $m \geq \text{val}(\phi)$  y, por tanto,

$$m = \text{val}(\phi) \quad (8.12)$$

Ahora, considerando en la red un corte mínimo  $F$ , teniendo en cuenta 8.11 y 8.12, y aplicando el teorema de flujo máximo–corte mínimo, se tiene  $n \leq c(F) = \text{val}(\phi) = m$ . Así, por 8.10,  $n = m$ .  $\square$

Aplicando este teorema y teniendo en cuenta la definición de  $k$ -arista-conectividad se obtiene el corolario siguiente:

**Corolario 8.11.** Un grafo  $G (\neq K_1)$  es  $k$ -arista-conexo si y sólo si entre cada par de vértices de  $G$  existen al menos  $k$  caminos arista-disjuntos.

El teorema de Menger para vértices es el siguiente:

**Teorema 8.12.** Sean  $u$  y  $v$  vértices no adyacentes de  $G$ . El número mínimo de vértices de un conjunto  $u$ - $v$  separador es igual al número máximo de caminos internamente disjuntos entre  $u$  y  $v$ .

*Demostración.* Podemos suponer que  $G$  es conexo. Sea  $m$  el número máximo de caminos disjuntos entre  $u$  y  $v$  y sea  $n$  el número mínimo de vértices de un conjunto  $u$ - $v$  separador. Claramente,

$$n \geq m \quad (8.13)$$

Sea  $G^*$  el digrafo simétrico asociado a  $G$ . Sea ahora  $G'$  el digrafo obtenido a partir de  $G^*$  mediante el procedimiento siguiente:

1. Reemplazamos cada vértice  $x \in V(G^*) - \{u, v\}$  por el par de vértices  $x', x''$  junto con el arco  $(x', x'')$ .
2. Si  $(x, y) \in A(G^*)$ , con  $x, y$  diferentes de  $u, v$ , entonces reemplazamos el arco  $(x, y)$  por el arco  $(x'', y')$ .
3. Si  $(u, x) \in A(G^*)$ , con  $x \neq v$ , entonces reemplazamos  $(u, x)$  por  $(u, x')$ . Análogamente, si  $(x, u) \in A(G^*)$ , con  $x \neq v$ , entonces reemplazamos  $(x, u)$  por  $(x'', u)$ .
4. Si  $(x, v) \in A(G^*)$ , con  $x \neq u$ , entonces reemplazamos  $(x, v)$  por  $(x'', v)$ . Finalmente, si  $(v, x) \in A(G^*)$ , con  $x \neq u$ , entonces reemplazamos  $(v, x)$  por  $(v, x')$ .

Cada camino  $P$  entre  $u$  y  $v$  en el grafo  $G$  corresponde a un camino dirigido  $P^*$  desde  $u$  hasta  $v$  en el digrafo  $G^*$  y corresponde, también, a un camino dirigido  $P'$  desde  $u$  hasta  $v$  en  $G'$ , donde  $P'$  se obtiene de  $P^*$  reemplazando cada vértice interno  $w$  de  $P^*$  por el arco  $(w', w'')$ . Recíprocamente, cada camino dirigido desde  $u$  hasta  $v$  en  $G'$  corresponde a un camino dirigido en  $G^*$  obtenido contrayendo los arcos de la forma  $(w', w'')$ , y corresponde también, por tanto, a un camino entre  $u$  y  $v$  en  $G$ . Además, dos caminos  $P_1$  y  $P_2$  en  $G$  entre  $u$  y  $v$  son internamente disyuntos si y sólo si los correspondientes  $P'_1$  y  $P'_2$  en  $G'$  no tienen arcos en común. Por tanto, el número máximo de caminos disyuntos en  $G$  entre  $u$  y  $v$  es también el número máximo de caminos dirigidos de  $u$  a  $v$  en  $G'$  que no tienen arcos en común.

Si  $\phi$  es un flujo máximo en la red de transporte  $X = (G', u, v, c)$ , donde la función capacidad  $c$  toma el valor  $c(a) = 1$  para todo  $a \in A(G')$ , entonces, tal como se ha establecido en la demostración del teorema de Menger para aristas,  $\text{val}(\phi) = m$ .

Por otra parte, si  $F$  es un corte mínimo en  $X$ , los arcos  $a \in A(G')$  que forman  $F$  son de la forma  $a = (u, x')$ ,  $a = (x', x'')$ ,  $a = (y'', x')$  o  $a = (x'', v)$ , donde  $x, y$  son vértices distintos de  $u, v$  (en  $G$ ). En cualquier caso, asociamos al arco  $a$  el vértice  $v_a = x \in V(G)$ . Sea  $V_a = \{v_a \mid a \in F\} \subset V(G)$ . Claramente,  $|V_a| \leq |F|$ . Además, fácilmente se comprueba que  $V_a$  constituye, en  $G$ , un conjunto  $u$ - $v$  separador. Por tanto,  $n \leq |V_a| \leq |F| = c(F)$ .

Ahora, aplicando otra vez el teorema del flujo máximo-corte mínimo, se tiene  $n \leq c(F) = \text{val}(\phi) = m$ . Así, por 8.13,  $n = m$ .  $\square$

**Ejercicio 8.13.** Determinar los digrafos  $G^*$  y  $G'$  de la demostración anterior que corresponden al grafo  $G$  de la figura 8.4.

Usando este teorema cuando  $u$  y  $v$  son vértices no adyacentes de  $G$  y considerando también el caso  $uv \in E(G)$ , se puede demostrar el resultado siguiente, llamado teorema de Whitney, que constituye la formulación para vértices del resultado dado por el corolario 8.11.

**Teorema 8.14.** Un grafo  $G$  con  $n \geq k + 1$  vértices es  $k$ -conexo si y sólo si entre cada dos vértices distintos de  $G$  existen al menos  $k$  caminos internamente disyuntos.

## 8.5 Apareamientos en grafos bipartitos

Un *apareamiento*  $M$  en un grafo  $G = (V, E)$  es un subconjunto de *aristas independientes*, es decir, si  $uv, st \in M$ , entonces  $\{u, v\} \cap \{s, t\} = \emptyset$ . Si  $uv \in M$ , diremos que  $u$  y  $v$  son *vértices apareados*. Por ejemplo, en la figura 8.6,  $M = \{12, 34\}$  es un apareamiento.

Un *apareamiento perfecto* es un apareamiento en el cual todo vértice del grafo es incidente con alguna arista del apareamiento. No todos el grafos contienen un apareamiento perfecto (por ejemplo, los que tienen un número impar de vértices como sucede en la figura 8.6).

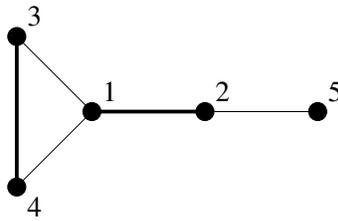


Figura 8.6: Apareamiento

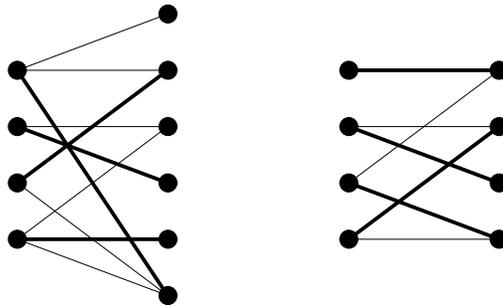


Figura 8.7: Apareamientos completo y perfecto

Dado que, en general, las cuestiones de apareamientos se aplican a resolver problemas de asignaciones, lo que quiere decir que el grafo a considerar es bipartito, nos centraremos en este tipo de grafos.

Sea  $M$  un apareamiento en un grafo bipartito  $G = (U \cup W, E)$ . Si  $M$  aparea todos los vértices de  $U$  con vértices de  $W$ , se dice que  $M$  es un *apareamiento completo* de  $U$  en  $W$ . Por tanto, si  $M$  es un apareamiento completo,  $|M| = |U|$ . Cuando  $|U| = |W|$ , un apareamiento completo también es perfecto. Los ejemplos de la figura 8.7 muestran un apareamiento completo y un apareamiento perfecto en grafos bipartitos. Sea  $S \subset U$ , entonces indicamos por  $\Gamma(S)$  el conjunto de vértices de  $W$  que son adyacentes con algún vértice de  $S$ . Se llama defecto de  $S$ , y lo denotaremos por  $\eta(S)$ , a  $|S| - |\Gamma(S)|$ . El defecto del grafo bipartito  $G$  es  $\eta(G) = \max\{\eta(S) \mid S \subset U\}$ . Como  $\eta(\emptyset) = |\emptyset| - |\Gamma(\emptyset)| = 0$ , se tiene  $\eta(G) \geq 0$ .

## 8.6 El teorema de Hall

Volviendo a la cuestión de la existencia de un apareamiento completo en un grafo bipartito  $G = (U \cup W, E)$ , una condición necesaria para su existencia es claramente que  $G$  tenga defecto nulo, es decir, que para todo subconjunto  $S$  de  $U$  se cumpla  $|S| \leq |\Gamma(S)|$ . Curiosamente,

esta condición es también suficiente. Esto es lo que afirma el llamado teorema de Hall. Para demostrar este resultado aplicaremos otra vez el teorema del flujo máximo–corte mínimo.

**Teorema 8.15.** Un grafo bipartito  $G = (U \cup W, E)$  admite un apareamiento completo de  $U$  en  $W$  si y sólo si para todo  $S \subset U$  se verifica  $|S| \leq |\Gamma(S)|$ .

*Demostración.* Demostramos sólo la suficiencia. Supongamos, por tanto, que para todo  $S \subset U$  se verifica  $|S| \leq |\Gamma(S)|$ .

Sea  $G'$  el digrafo con conjunto de vértices  $V(G') = V(G) \cup \{s, t\}$ , donde  $s$  y  $t$  son dos nuevos vértices añadidos a  $V(G)$ , y conjunto de arcos  $A(G') = A_s \cup A_{UV} \cup A_t$ , donde  $A_s = \{(s, u) \mid u \in U\}$ ,  $A_{UV} = \{(u, w) \mid uw \in E\}$  y  $A_t = \{(w, t) \mid w \in W\}$ . Sea  $X$  la red de transporte  $(G', s, t, c)$  donde  $c(a) = 1$  para todo  $a \in A_s \cup A_t$  y  $c(a) = M$  para todo  $a \in A_{UV}$ , siendo  $M > |U|$ .

Sea  $F$  un  $s$ – $t$  corte en  $X$ . Si  $F$  contiene algún arco de  $A_{UV}$ , entonces  $c(F) \geq M > |U|$ . De otro modo, el corte  $F$  debe tener la estructura  $F = (P, \bar{P})$  con  $P = \{s\} \cup S \cup T$ ,  $S \subset U$ ,  $T \subset W$  y  $\Gamma(S) \subset T$ . Naturalmente,  $\bar{P} = (U \setminus S) \cup (W \setminus T) \cup \{t\}$ . Pero, en este caso:

$$c(F) = |U \setminus S| + |T| = |U| - |S| + |T| \geq |U| - (|S| - |\Gamma(S)|) \geq |U|$$

Así, cualquier  $s$ – $t$  corte tiene capacidad más grande o igual a  $|U|$ . Por otra parte,  $A_s$  constituye un corte mínimo con capacidad  $|U|$ . Por tanto, si  $\phi$  es un flujo máximo en  $X$ , por el teorema del flujo máximo–corte mínimo, su valor es  $\text{val}(\phi) = |U|$ . Pero un flujo de valor  $|U|$  en  $X$  corresponde a un apareamiento completo de  $U$  en  $W$ .  $\square$

Observemos que la necesidad de la condición del teorema de Hall también se puede demostrar usando la red de transporte  $X$  considerada. En efecto, si  $|S| > |\Gamma(S)|$  para cierto  $S \subset U$ , entonces considerando el  $s$ – $t$  corte  $F = (P, \bar{P})$  con  $P = \{s\} \cup S \cup \Gamma(S)$  se tendría

$$c(F) = |U \setminus S| + |\Gamma(S)| = |U| - |S| + |\Gamma(S)| < |U|$$

Así, un flujo máximo en  $X$  tiene un valor inferior a  $|U|$  y no es posible un apareamiento completo.

**Ejercicio 8.16.** (Problema de los matrimonios.) Sean un grupo de muchachos y un grupo de muchachas tales que a cada muchacha le agrada alguno de los muchachos. ¿Cuáles son las condiciones para que todas las muchachas se puedan casar con un muchacho que les agrada?

La condición  $|S| \leq |\Gamma(S)|$  puede ser difícil de comprobar. El resultado que se presenta a continuación proporciona una condición suficiente para la existencia de un apareamiento completo.

**Corolario 8.17.** Sea  $G = (U \cup W, E)$  un grafo bipartito. Si existe un entero  $k > 0$  tal que  $d(u) \geq k \geq d(w)$  para todo vértice  $u \in U$  y todo vértice  $w \in W$ , entonces existe un apareamiento completo de  $U$  en  $W$ .

*Demostración.* Consideremos un subconjunto  $S \subset U$ . Como el conjunto de aristas  $E_{\Gamma(S)}$  incidentes con vértices de  $\Gamma(S)$  contiene el conjunto de aristas  $E_S$  incidentes con vértices de  $S$ , tenemos la relación

$$k|\Gamma(S)| \geq |E_{\Gamma(S)}| \geq |E_S| \geq k|S|$$

de donde se obtiene la condición suficiente del teorema de Hall.  $\square$

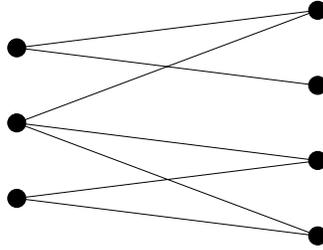


Figura 8.8: Existencia de un apareamiento completo

El resultado anterior se aplica, en particular, cuando el grafo es  $k$ -regular.

**Ejercicio 8.18.** Aplicar el resultado anterior al grafo de la figura 8.8 y encontrar un apareamiento completo.

Hay muchos problemas de optimización combinatoria que pueden ser tratados gracias al teorema de Hall. Uno de ellos, el que dio lugar al estudio de Hall, se formula de la forma siguiente: dada una colección de conjuntos  $S_1, S_2, \dots, S_n$  no vacíos encontrar lo que se llama un *sistema de representantes diferentes*, o *transversal*, es decir, un conjunto  $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  tal que  $s_i \in S_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , y  $s_i \neq s_j$  si  $i \neq j$ .

Muchas veces, a pesar de no existir un apareamiento completo, interesa encontrar un apareamiento de cardinalidad máxima. A continuación se demuestra un resultado que permite saber cuál es la cardinalidad de este apareamiento a partir del defecto del grafo.

**Teorema 8.19.** Dado un grafo bipartito  $G = (U \cup W, E)$ , el máximo número de vértices de  $U$  que se pueden aparear con vértices de  $W$  es  $|U| - \eta(G)$  y este apareamiento existe.

*Demostración.* La demostración es similar a la del teorema de Hall. Se contruye una red de transporte  $X$  de la misma manera y se considera un  $s$ - $t$  corte  $F$ . Si  $F$  contiene algún arco de  $A_{UV}$ , entonces  $c(F) \geq M > |U| \geq |U| - \eta(G)$ . De otro modo, el corte  $F$  debe tener la estructura  $F = (P, \bar{P})$  con  $P = \{s\} \cup S \cup T$ ,  $S \subset U$ ,  $T \subset W$  y  $\Gamma(S) \subset T$ . Pero, también en este caso:

$$c(F) = |U| - |S| + |T| \geq |U| - (|S| - |\Gamma(S)|) = |U| - \eta(S) \geq |U| - \eta(G)$$

Así, cualquier  $s$ - $t$  corte tiene capacidad más grande o igual a  $|U| - \eta(G)$ .

Ahora, sea  $S \subset U$  tal que  $\eta(S) = \eta(G)$ . Si  $P = \{s\} \cup S \cup \Gamma(S)$ , entonces  $F = (P, \bar{P})$  es un corte mínimo, ya que  $c(F) = |U| - |S| + |\Gamma(S)| = |U| - \eta(S) = |U| - \eta(G)$ .

Así, un flujo máximo en  $X$ , que corresponde a un apareamiento de cardinalidad máxima en  $G$ , tiene valor  $|U| - \eta(G)$ .  $\square$

## Notas bibliográficas

La referencia para el teorema de flujo máximo–corte mínimo, debido a Ford y Fulkerson, es [5]. También es preciso mencionar el libro [6] de estos mismos autores. Una mejora del algoritmo de Ford y Fulkerson, debida a Edmonds y Karp, se encuentra en [4]. Resultados recientes sobre flujos en redes se dan en [7].

La relación entre conectividad, arista-conectividad y grado mínimo, dada por el teorema 8.9, es debida a Whitney [10]. El libro de Chartrand y Lesniak [2] contiene una excelente exposición del tema de conectividad. Para ver las aplicaciones al estudio de la vulnerabilidad de una red de interconexión se puede consultar [1].

Finalmente, la referencia para el teorema de Hall es [8]. Un buen algoritmo para encontrar apareamientos en grafos bipartitos se da en [3]. En [9] se describe una aplicación interesante de este teorema al problema de optimización del número de conexiones de redes multibus para sistemas multiprocesadores.

## Bibliografía

- [1] J.-C. Bermond, N. Homobono, C. Peyrat. “Large fault-tolerant interconnection networks”, *Graphs and Combinatorics*, **5**, pp. 107–123, 1989.
- [2] G. Chartrand, L. Lesniak. *Graphs and Digraphs*, Wadsworth & Brooks, 1986.
- [3] J. Edmonds. “Paths, trees and flowers”, *Canad. J. Math.*, **17**, pp. 449–467, 1965.
- [4] J. Edmonds, R. M. Karp. “Theoretic improvements in algorithmic efficiency for network flow problems”, *J. Assoc. Comput. Mach.*, **19**, pp. 248–264, 1972.
- [5] L. R. Ford, D. R. Fulkerson. “Maximal flow through a network”, *Canad. J. Math.*, **8**, pp. 399–404, 1956.
- [6] L. R. Ford, D. R. Fulkerson. *Flows in networks*, Princeton University Press, 1962.
- [7] A. V. Goldberg, E. Tardos, R. E. Tarjan. “Network flow algorithms”, *Tech. Rep.*, CS–TR–216–89, Princeton University.

- [8] P. Hall. “On representatives of subsets”, *J. London Math. Soc.*, **10**, pp. 26–30, 1935.
- [9] T. Lang, M. Valero, M. A. Fiol. “Reduction of connections for multibus organization”, *IEEE Trans. Computers*, **C-32**, n. 8, pp. 707–716, 1983.
- [10] H. Whitney. “Congruent graphs and the connectivity of graphs”, *Amer. J. Math.*, **54**, pp. 150–168, 1932.

## Problemas

1. Considerar la red de transporte  $X = (G, s, t, c)$  con conjunto de vértices  $V(G) = \{s, 1, 2, 3, 4, 5, t\}$  y con arcos y capacidades de los arcos dados por la tabla siguiente:

Arco	$(u, 1)$	$(2, u)$	$(u, 3)$	$(1, 2)$	$(2, 3)$	$(1, 4)$
Capacidad	5	4	4	3	2	4

Arco	$(1, 5)$	$(3, 5)$	$(5, 4)$	$(4, t)$	$(5, t)$
Capacidad	2	3	2	3	4

- (a) Determinar un corte de capacidad mínima.
- (b) Aplicando el algoritmo de Ford y Fulkerson, determinar un flujo máximo.
2. Sea  $\phi$  un flujo máximo y  $F$  un corte mínimo en una red de transporte. Demostrar que  $\phi(a) = c(a)$  para todo  $a \in F$  y  $\phi(a) = 0$  para todo  $a \in \overline{F}$ .
3. Demostrar el teorema 8.9: para todo grafo  $G$ ,  $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ .
4. Determinar un grafo  $G$  con  $\kappa(G) = 3$ ,  $\lambda(G) = 4$  y  $\delta(G) = 5$ .
5. Un grafo no trivial conexo y sin vértices de corte se llama *bloque*. Un *bloque de un grafo*  $G$  es un subgrafo de  $G$  que es bloque y que es maximal respecto de esta propiedad. Demostrar que:
- (a) un bloque de  $G$  es un subgrafo inducido de  $G$ ;
- (b) dos bloques de  $G$  distintos tienen como mucho un vértice en común que es un vértice de corte de  $G$ ;
- (c)  $G$  se puede expresar como unión de sus bloques.
6. Demostrar el resultado siguiente usado en la demostración del teorema 8.10: Sea  $D$  un digrafo conexo con vértices  $u$  y  $v$  tales que  $d^+(u) = d^-(u) + k$ ,  $d^-(v) = d^+(v) + k$ , donde  $k$  es un entero positivo, y tal que  $d^+(w) = d^-(w)$  para todo  $w \in V(D) - \{u, v\}$ . Entonces existen  $k$  caminos desde  $u$  hasta  $v$  que son disjuntos en arcos.

7. Demostrar que en todo grafo 2-conexo dos vértices cualesquiera pertenecen a un ciclo común.
8. Comprobar los teoremas de Menger en el grafo de Petersen  $P$ . ¿Cuál es el valor de  $\lambda(P)$  y  $\kappa(P)$ ?
9. Sea  $G$  un grafo y sean  $U$  y  $W$  subconjuntos disyuntos de  $V(G)$ . Un camino de la forma  $u, z_1, \dots, z_n, v$  con  $u \in U$  y  $v \in V$ , diremos que es un camino  $U-V$ . También diremos que  $S \subset V(G)$  es un conjunto  $U-V$  separador si  $G - S$  no contiene ningún camino entre vértices de  $U$  y vértices de  $W$ . Demostrar la siguiente generalización del teorema de Menger: El número mínimo de vértices de un conjunto  $U-V$  separador es igual al número máximo de caminos  $U-V$  que son disyuntos en vértices.
10. Enunciar y demostrar los teoremas de Menger para digrafos.
11. Sea  $G$  un grafo con  $n$  vértices, conectividad  $\kappa \geq 1$  y diámetro  $D$ . Demostrar que  $n \geq \kappa(D - 1) + 2$ .
12. Determinar un apareamiento completo en el hipercubo  $Q_n$ .
13. Sea  $\mathcal{S}$  la colección de conjuntos  $\{3, 5\}$ ,  $\{3, 4\}$ ,  $\{1, 3\}$ ,  $\{1, 5\}$  y  $\{2, 4\}$ . Encontrar un transversal para  $\mathcal{S}$  asociando a  $\mathcal{S}$  un determinado grafo bipartito y encontrando un apareamiento completo en este grafo.
14. Formular una condición necesaria y suficiente para la existencia de un transversal para la colección de conjuntos no vacíos  $S_1, S_2, \dots, S_n$ .
15. Un 1-factor de un grafo  $G$  es un subgrafo generador de  $G$  que es 1-regular.
  - (a) Demostrar que  $G$  contiene un 1-factor si y sólo si  $G$  contiene un apareamiento perfecto;
  - (b) demostrar que todo grafo bipartito regular contiene un 1-factor.
16. Un grafo  $G$  se dice  $k$ -arista-colorable si existe una aplicación  $c$  entre  $E(G)$  y un conjunto  $C$  de  $k$  elementos, llamados *colores*, tal que las aristas incidentes con un mismo vértice tienen colores distintos asignados. Demostrar que si  $G$  es bipartito, entonces el mínimo valor de  $k$  tal que  $G$  es  $k$ -colorable es  $\Delta(G)$ .

*Indicación:* demostrar primero que  $G$  es subgrafo de un subgrafo bipartito  $\Delta$ -regular.