

Parte I Enumeración

En esta parte se presentan diversas técnicas para contar los elementos de un conjunto. Paralelamente a la descripción de técnicas usuales de enumeración, se presentan también problemas clásicos de combinatoria, a los cuales se aplican los resultados que se van obteniendo.

Las técnicas más sencillas basadas en la enumeración de permutaciones y combinaciones se tratan en el primero de los tres capítulos que componen esta primera parte, y se aplican estas técnicas a problemas de enumeración de funciones entre conjuntos, palabras de alfabetos, distribuciones, particiones de enteros y la fórmula del binomio. En el segundo capítulo se analizan algunos principios básicos de enumeración, especialmente el principio de inclusión-exclusión, y se consideran los problemas de desarreglos, función de Euler, números de Catalan y particiones de enteros. Aunque no son estrictamente principios de enumeración, se incluyen también en este capítulo el principio del palomar y el teorema de Ramsey. El último capítulo de esta parte está dedicado a las ecuaciones de recurrencia y las funciones generadoras. Aunque hemos intentado mantener un nivel asequible, estos son los temas que requieren más nivel matemático, y resultarán más fáciles al lector que tenga cierta familiaridad con las series de potencias. Esta primera parte se cierra con los números de Stirling y de Bell. Algunos temas de enumeración que requieren conocimientos adicionales se ven en otras partes del texto. Así, por ejemplo, ciertos problemas de enumeración de grafos se tratan en la segunda parte, y la teoría de enumeración de Pólya se presenta en la tercera parte.

Capítulo 2

Combinaciones y permutaciones

1. Selecciones ordenadas y no ordenadas
2. Algunos ejemplos de aplicación
3. Propiedades de los coeficientes binomiales

En este capítulo se exponen los problemas más simples de enumeración que forman parte de la combinatoria elemental. Los modelos básicos se basan en la enumeración de selecciones ordenadas y no ordenadas, con o sin repetición, de los elementos de un cierto conjunto. En la sección 1 se obtienen las fórmulas de enumeración de estas selecciones. A pesar de su simplicidad, estos problemas de enumeración permiten resolver una diversidad considerable de problemas, de los cuales hay algunos ejemplos interesantes en la sección 2: el número de palabras que pueden formarse a partir de un alfabeto, el número de soluciones de ciertas ecuaciones enteras, el número de aplicaciones entre dos conjuntos, la fórmula del binomio y problemas relacionados, y los problemas de distribuciones. Los llamados coeficientes binomiales tienen una importancia singular y permiten expresar muchos de los resultados de enumeración; la tercera sección está dedicada a analizar las propiedades más importantes de estos números.

2.1 Selecciones ordenadas y no ordenadas

Comenzaremos con un recorrido por la combinatoria elemental contando de cuántas maneras diferentes se pueden seleccionar un cierto número de elementos de un conjunto. Para contar este número es preciso fijar los criterios con que se diferencia una selección de otra. Aquí tendremos en cuenta dos tipos de criterios: el orden de los elementos y el número de veces que puede aparecer cada uno.

Si distinguimos dos selecciones: cuando tienen elementos diferentes, o bien, cuando los elementos aparecen en un orden diferente, hablaremos de *permutaciones*. En cambio, si no distinguimos dos selecciones que sólo difieren en la ordenación de sus elementos, entonces hablaremos de *combinaciones*. Por otra parte, si cada elemento puede aparecer como mucho una vez, hablaremos de selecciones *sin repetición*, mientras que, si no hay esta restricción, hablaremos de selecciones *con repetición*. Por ejemplo, en el conjunto

$$X = \{1, 2, 3, 4\}$$

podemos formar 16 permutaciones, con repetición, de dos elementos,

11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34
41	42	43	44

12 permutaciones, sin repetición, de dos elementos,

	12	13	14
21		23	24
31	32		34
41	42	43	

10 combinaciones, con repetición, de dos elementos,

11	12	13	14
	22	23	24
		33	34
			44

y 6 combinaciones, sin repetición, de dos elementos,

	12	13	14
		23	24
			34

En esta sección obtendremos una fórmula para la enumeración del número de selecciones diferentes de k elementos, tomados de un conjunto X de n elementos, que identificaremos con $\{1, 2, \dots, n\}$.

Lo que resulta más sencillo de contar es el número de selecciones ordenadas con repetición de k elementos. Llamamos PR_n^k a este número, que se lee “permutaciones con repetición de n

elementos tomados de k en k ". Tenemos n elecciones para el primer elemento de la selección, y para cada elección podemos formar todas las permutaciones con repetición de n elementos, pero ahora tomados de $k - 1$ en $k - 1$. Es decir,

$$PR_n^k = nPR_n^{k-1}$$

Aplicando esta fórmula sucesivamente, y teniendo en cuenta que $PR_n^1 = n$ (hay n elecciones para el último elemento), obtenemos

$$PR_n^k = nPR_n^{k-1} = n^2PR_n^{k-2} = \dots = n^k$$

En el ejemplo anterior obtenemos $PR_4^2 = 4^2 = 16$ permutaciones con repetición de cuatro elementos tomados de 2 en 2.

Consideremos ahora las permutaciones sin repetición de n elementos tomados de k en k , el número de las cuales denotaremos por P_n^k . Como cada elemento puede aparecer como mucho una sola vez en la selección, es preciso que $k \leq n$. Podemos calcular este número con un argumento similar al anterior. Tenemos n opciones para el primer elemento y para cada uno podemos formar las permutaciones de los $n - 1$ elementos restantes (ahora un elemento puede salir en la selección como mucho una vez) tomados de $k - 1$ en $k - 1$, de manera que

$$P_n^k = nP_{n-1}^{k-1}$$

Como $k \leq n$, la aplicación sucesiva de esta relación lleva a $P_{n-(k-1)}^1 = n - (k - 1)$ (el último elemento se puede escoger entre los $n - (k - 1)$ que aún no han sido escogidos), de donde

$$P_n^k = n \cdot (n - 1) \cdots (n - k + 1)$$

En particular, cuando $k = n$, obtenemos las *permutaciones* de n elementos, el número de las cuales se denota simplemente como $P_n = n \cdot (n - 1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$. Este número se representa con el símbolo $n!$ y se lee *factorial* de n . En particular, el símbolo factorial permite escribir P_n^k de manera más económica como

$$P_n^k = \frac{n!}{(n - k)!}$$

notación que se puede extender al caso $n = k$ si adoptamos el convenio que $0! = 1$. Veremos más adelante que este convenio tiene una justificación combinatoria y permite además dar cohesión a muchas notaciones, de manera que es universalmente aceptado.

Se puede considerar una situación intermedia entre las permutaciones con repetición y las permutaciones sin repetición y también es fácil de contar. Consiste en fijar de entrada el número de veces que cada elemento debe aparecer en la selección. Por ejemplo, se pueden formar 12 permutaciones con los elementos de $X = \{1, 2, 3, 4\}$ de manera que 1 aparezca exactamente dos veces, 2 y 3 aparezcan una sola vez y 4 ninguna,

1123 1213 1231 2113 2131 2311
1132 1312 1321 3112 3121 3211

En general, supongamos que el elemento i aparece k_i veces en la selección. Formemos un nuevo conjunto

$$Y = \{1_1, \dots, 1_{k_1}, 2_1, \dots, 2_{k_2}, \dots, n_1, \dots, n_{k_n}\}$$

de $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ elementos, en el cual hemos distinguido provisionalmente las k_i apariciones de cada elemento. Formemos ahora las $k!$ permutaciones de los elementos de este conjunto y agrupemos aquellas que difieren sólo en una permutación de los elementos del mismo tipo. En el ejemplo anterior obtendríamos los grupos siguientes,

$1_1 1_2 23$	$1_1 21_2 3$	$1_1 231_2$	$21_1 1_2 3$	$21_1 31_2$	$231_1 1_2$
$1_2 1_1 23$	$1_2 21_1 3$	$1_2 231_1$	$21_2 1_1 3$	$21_2 31_1$	$231_2 1_1$
$1_1 1_2 32$	$1_1 31_2 2$	$1_1 321_2$	$31_1 1_2 2$	$31_1 21_2$	$321_1 1_2$
$1_2 1_1 32$	$1_2 31_1 2$	$1_2 321_1$	$31_2 1_1 2$	$31_2 21_1$	$321_2 1_1$

En general, cada grupo tiene $k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!$ elementos, que representan de hecho la misma permutación cuando dejamos de distinguir los subíndices. Así, el número de permutaciones de n elementos en los cuales el elemento i aparece k_i veces, que denotaremos por $P_n^{k_1, \dots, k_n}$, vale

$$P_n^{k_1, \dots, k_n} = \frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}, \quad k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$$

Vamos a considerar ahora selecciones no ordenadas o combinaciones. Dos selecciones serán diferentes si y sólo si tienen elementos diferentes. Primero contaremos las combinaciones sin repetición de n elementos tomados de k en k (donde k no puede ser más grande que n), y denotaremos este número como C_n^k . Para esto consideramos provisionalmente todas las P_n^k selecciones ordenadas, y agrupamos aquellas que sólo difieren en el orden de sus elementos. En el ejemplo al comienzo de la sección, en el que se formaban selecciones de dos elementos de un conjunto de cuatro, obtendríamos los grupos,

12	13	14
21	31	41
	23	24
	32	42
		34
		43

En general, cada uno de los grupos contiene $k!$ permutaciones que representan la misma combinación, de manera que

$$C_n^k = \frac{P_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}, \quad 0 \leq k \leq n$$

Este número aparece con tanta frecuencia en la combinatoria que recibe también una notación y denominación especiales: se llama *coeficiente binomial* y se denota por $\binom{n}{k}$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

(se dice ‘n sobre k’ o ‘n escoge k’). En una sección posterior trataremos algunas de las propiedades y aplicaciones de estos números. De momento observemos que este número coincide también con el de permutaciones de dos elementos en que uno se repite $k_1 = k$ veces y el otro $k_2 = n - k$ veces,

$$P_2^{k,n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} = C_n^k \quad (2.1)$$

En la sección siguiente discutiremos una interpretación combinatoria de este resultado, pero de momento nos será útil para contar el último de los números que nos interesan aquí: el de las *combinaciones con repetición* de n elementos tomados de k en k , que denotaremos por CR_n^k (aquí no es preciso que $k \leq n$). Observemos que si agrupamos las permutaciones con repetición que sólo difieren en el orden, no todos los grupos tienen el mismo tamaño. En el ejemplo del comienzo de la sección, el grupo que corresponde a la combinación $\{1, 1\}$ tiene un único elemento, mientras que el que corresponde a $\{1, 2\}$ contiene las dos permutaciones 12 y 21. Por lo tanto, la técnica que hemos usado antes para contar combinaciones sin repetición ya no nos es útil aquí.

En este caso nos serviremos de una estrategia ingeniosa. Pongamos $n - 1$ barras que definan n espacios, uno para cada elemento del conjunto original. Identifiquemos cada una de las combinaciones con repetición poniendo en cada uno de estos espacios tantas estrellas como elementos correspondientes haya en la combinación. En el ejemplo tendríamos las correspondencias,

$$\begin{array}{ll} 11 \leftrightarrow ** | & | & | & 12 \leftrightarrow * | & * | & | & | \\ 13 \leftrightarrow * | & | & * | & 14 \leftrightarrow * | & | & | & * \\ 22 \leftrightarrow | & ** | & | & 23 \leftrightarrow | & * | & * | & \\ 24 \leftrightarrow | & * | & | & * & 33 \leftrightarrow | & | & ** | \\ 34 \leftrightarrow | & | & * | & * & 44 \leftrightarrow | & | & | & ** \end{array}$$

De acuerdo con esta correspondencia, hay tantas combinaciones con repetición de n elementos tomados de k en k como permutaciones de dos elementos (barras y estrellas) con exactamente $n - 1$ barras y k estrellas. Ya hemos visto en la expresión 2.1 que este número coincide con el de las combinaciones de $k + n - 1$ elementos tomados de k en k , de manera que,

$$CR_n^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Con este número se completan las expresiones más comunes de la combinatoria elemental que resumimos en la tabla que sigue.

Tabla 2.1: Número de selecciones

	permutaciones	combinaciones
sin repetición	$P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad k \leq n$	$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}, \quad k \leq n$
con repetición	$PR_n^k = n^k$	$CR_n^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$
con repeticiones k_1, \dots, k_n $k = k_1 + \dots + k_n$	$P_n^{k_1, \dots, k_n} = \frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}$	1

2.2 Algunos ejemplos de aplicación

El problema de contar el número de selecciones de elementos de un conjunto que hemos usado como modelo en la sección anterior es sólo una referencia a la cual se pueden reducir muchos de los problemas de la combinatoria elemental. En esta sección expondremos unos cuantos de estos problemas y su relación con el problema original.

Palabras de alfabetos

Dado un alfabeto de n símbolos, $A = \{1, 2, \dots, n\}$, queremos contar el número de posibles palabras diferentes que se pueden formar de acuerdo con diversos criterios.

El número de palabras de una longitud fijada k que se pueden formar con n símbolos coincide con el de selecciones ordenadas con repetición:

$$PR_n^k = n^k$$

Por ejemplo, con ocho bits (ceros o unos) se pueden formar $2^8 = 256$ palabras. En el caso de que todos los símbolos de una palabra sean diferentes (por tanto $k \leq n$), podemos formar

tantas palabras como selecciones ordenadas de k elementos de un conjunto de n , es decir, el número de permutaciones de n elementos tomados de k en k ,

$$P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Si fijamos la cantidad de cada uno de los símbolos que aparece en cada palabra, es decir, exigimos que haya k_i símbolos i para $1 \leq i \leq n$ (y por tanto la palabra tiene longitud $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$), el número de palabras que se pueden formar es el de permutaciones con repeticiones fijadas,

$$P_k^{k_1, \dots, k_n} = \frac{k!}{k_1! \dots k_n!}$$

En particular, si el alfabeto sólo tiene dos símbolos, el número de palabras en que uno de los símbolos aparece exactamente k veces y el otro $n - k$ es

$$P_2^{k, n-k} = \frac{k!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

es decir, el número de combinaciones de n elementos tomados de k en k .

Conjuntos y aplicaciones

El número de permutaciones con repetición de k elementos de un conjunto de tamaño n se puede interpretar también como una aplicación que le asigna uno de los n elementos a cada una de las k posiciones de la selección. En la figura siguiente se ilustra esta asignación para $k = 7$ y $n = 5$.

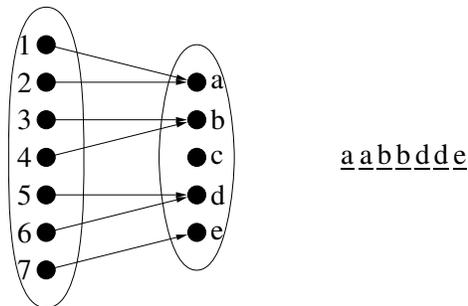


Figura 2.1: Relación entre aplicaciones y selecciones

Con esta analogía, si $B = \{1, 2, \dots, k\}$ y $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ son dos conjuntos finitos, cada aplicación $f : B \rightarrow A$ se puede identificar con la selección ordenada $(f(1), \dots, f(k))$ de elementos de A . El número de aplicaciones de B en A es entonces el de permutaciones con repetición $PR_n^k = n^k$ (por ello se suele representar el conjunto de aplicaciones de B en A por A^B).

Por otra parte, el número de aplicaciones inyectivas (es decir, dos posiciones diferentes no pueden tener el mismo elemento) que se pueden definir de B en A es el número de permutaciones de n elementos tomados de k en k , P_n^k (y entonces tiene que ser $k \leq n$). En una sección posterior se trata la enumeración de aplicaciones exhaustivas (problema 5 del capítulo siguiente).

Las combinaciones se asocian de manera natural con subconjuntos. Una selección no ordenada de k elementos de un conjunto de tamaño n es de hecho un subconjunto de tamaño k . El número de subconjuntos de k elementos de un conjunto de tamaño n es entonces el de las combinaciones C_n^k . Aquí admitimos que hay un subconjunto de cero elementos (el subconjunto vacío) y uno de n elementos (el conjunto de partida), de donde

$$C_n^0 = \frac{n!}{n!0!} = C_n^n = 1$$

cosa que justifica el convenio que hemos adoptado de escribir $0! = 1$.

Una manera de representar los subconjuntos de tamaño k de un conjunto de tamaño n consiste en enumerar los elementos del conjunto, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, y expresar cada subconjunto $B \subset A$ como una palabra de longitud n de 0's y 1's, $x_1x_2\dots x_n$, $x_i \in \{0, 1\}$, de manera que x_i vale 1 si el elemento a_i pertenece a B y vale cero de otro modo. Por ejemplo, el subconjunto $B = \{a_2, a_5\}$ de $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ se representaría por la palabra 010010, mientras que el conjunto A entero se representa por la palabra 111111. Volvemos a encontrar, entonces, que el número de palabras de longitud n con k 1's y $(n - k)$ 0's es el mismo que el número de subconjuntos de tamaño k de un conjunto de tamaño n , $\binom{n}{k}$.

Binomios y otras expresiones aritméticas

El origen de la denominación *coeficiente binomial* para los números $\binom{n}{k}$ se encuentra en el cálculo del desarrollo de la expresión binomial

$$(a + b)^n = \underbrace{(a + b) \cdot (a + b) \cdots (a + b)}_n$$

donde n es un número entero. Desarrollando el producto de los n paréntesis, se obtiene una expresión en la cual aparecen términos del estilo $a^i b^{n-i}$ con $0 \leq i \leq n$. Cada término $a^i b^{n-i}$ aparece al escoger a en i de los paréntesis y b en los $n - i$ restantes al hacer el producto. Como

esta elección se puede hacer de $\binom{n}{i}$ maneras diferentes, se obtiene la expresión

$$(a+b)^n = \binom{n}{n} a^n b^0 + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b^1 + \cdots + \binom{n}{0} a^0 b^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

llamada *fórmula del binomio*, en la cual los coeficientes de cada monomio son números combinatorios.

De manera similar se obtiene la llamada *fórmula multinomial* que permite expresar el desarrollo de

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^k = \underbrace{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \cdots (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)}_k$$

Razonando de la misma manera que en el caso anterior, el coeficiente de $a_1^{k_1} \cdot a_2^{k_2} \cdots a_n^{k_n}$ en este desarrollo es el número de elecciones de a_i en k_i de los paréntesis, para cada i , $1 \leq i \leq n$, de donde

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^k = \sum \frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_n!} a_1^{k_1} \cdot a_2^{k_2} \cdots a_n^{k_n}$$

donde el sumatorio se extiende a todas las combinaciones de enteros no negativos k_1, k_2, \dots, k_n tales que $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k$. De aquí proviene también la denominación de coeficiente multinomial para $P_n^{k_1 k_2 \dots k_n}$. Por analogía con el coeficiente binomial, el multinomial se expresa también como

$$\binom{k_1 + k_2 + \cdots + k_n}{k_1, k_2, \dots, k_n} = \frac{(k_1 + k_2 + \cdots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_n!}$$

Supongamos ahora que extendemos la expresión multinomial al caso de que haya una cantidad infinita numerable de sumandos. Para simplificar la situación supondremos que los sumandos son potencias de a ,

$$\left(\sum_{i \geq 0} a^i \right)^n = (1 + a + a^2 + a^3 + \cdots)^n$$

En este caso obtendremos una expresión del estilo

$$c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + c_3 a^3 + \cdots$$

donde el coeficiente c_i corresponde al número de maneras de escoger un sumando en cada uno de los n paréntesis $(1 + a + a^2 + a^3 + \cdots)$ de manera que la suma de las potencias sea i . Para calcular este coeficiente se puede seguir la estrategia siguiente. Identificamos cada uno de los paréntesis con una bola numerada (de 1 a n), y extraemos una selección no ordenada de i bolas

con repeticiones permitidas. Identificamos la selección con una elección de potencias en cada paréntesis de la manera siguiente. Si en la selección hay r_1 bolas 1, r_2 bolas 2, y en general r_i bolas i , tomamos a^{r_1} en el primer paréntesis, a^{r_2} en el segundo y, en general, a^{r_i} en el i -ésimo, $i \leq n$. Así, hay tantas combinaciones con repetición de n elementos tomados de i en i como maneras de escoger un sumando en cada paréntesis de manera que las potencias escogidas sumen i , o sea que $c_i = \binom{n+i-1}{i}$. De aquí que

$$\left(\sum_{i \geq 0} a^i\right)^n = (1 + a + a^2 + a^3 + \dots)^n = \sum_{i \geq 0} \binom{n+i-1}{i} a^i \quad (2.2)$$

Ecuaciones enteras

Directamente relacionado con los últimos ejemplos, se puede considerar el número de maneras diferentes en que se puede escribir un entero como suma ordenada de enteros no negativos, es decir, el número de soluciones de la ecuación

$$k = x_1 + x_2 + \dots + x_n, \quad x_i \geq 0$$

con x_i entero no negativo. Por ejemplo, 4 se puede expresar como suma de tres enteros no negativos de las 15 maneras siguientes

$$\begin{array}{lll} 0+0+4 & 0+4+0 & 4+0+0 \\ 0+2+2 & 2+0+2 & 2+2+0 \\ 0+1+3 & 0+3+1 & 1+0+3 \\ 1+3+0 & 3+0+1 & 3+1+0 \\ 1+1+2 & 1+2+1 & 2+1+1 \end{array}$$

Este número se puede contar de la manera siguiente. Consideremos combinaciones con repetición de k elementos de $X = \{1, 2, \dots, n\}$. En cada combinación llamamos x_j al número de veces que aparece el elemento j . Entonces, $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$, y cada una de las combinaciones corresponde a una solución de la ecuación. Además, dos combinaciones diferentes dan dos soluciones diferentes. En el ejemplo anterior, la combinación con repetición 2333 del conjunto $\{1, 2, 3\}$ corresponde a la solución $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ y $x_3 = 3$. El número de soluciones es entonces

$$CR_n^k = \binom{n+k-1}{k}$$

Hay otra manera de obtener el mismo resultado. Ponemos k como la suma de k 1's. Cada expresión de k como suma de n enteros no negativos se corresponde con una agrupación de los

k unos en n grupos, cosa que se puede conseguir poniendo $n - 1$ ‘separaciones’ en el grupo de k unos. Por ejemplo, en la lista anterior,

$$4 = 1 + 1 + 2 \rightarrow 1\bullet1\bullet11$$

$$4 = 1 + 0 + 3 \rightarrow 1\bullet\bullet111$$

$$4 = 0 + 2 + 2 \rightarrow \bullet11\bullet11$$

Así, hay $n + k - 1$ posiciones en las cuales es preciso poner $n - 1$ separaciones y k unos. Esto se puede hacer de $\binom{n+k-1}{k}$ maneras.

Este problema admite diversas variaciones. Por ejemplo, el número de soluciones de la ecuación

$$r = y_1 + y_2 + \cdots + y_n, \quad y_i > 0$$

donde y_i son ahora enteros positivos y $r > n$ se puede obtener del problema anterior poniendo $x_i = y_i - 1$ (que será no negativo) y $k = r - n$, es decir, el número de soluciones vuelve a ser

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{r-1}{n-1}$$

Si hacemos ahora $z_i = x_i + a$, $1 \leq i \leq n$ con a un entero positivo, el número de soluciones de la ecuación

$$t = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$$

con $z_i \geq a$ y $t > na$ es nuevamente

$$\binom{t-na+n-1}{n-1}$$

Ejercicio 2.1. ¿Cuál es el número de soluciones enteras de la ecuación

$$8 = x_1 + x_2 + x_3$$

de manera que x_i sean enteros entre 1 y 4?

Distribuciones

Para acabar esta pequeña lista de ejemplos consideremos el problema siguiente. Supongamos que tenemos n cajas numeradas y k bolas que se ponen en las cajas. El objetivo es contar cuántas disposiciones diferentes de las bolas en las cajas se pueden obtener atendiendo a diversos criterios.

Si cada caja puede contener como mucho una bola, y estas están numeradas (es decir, son distinguibles), el número de disposiciones diferentes es el de permutaciones de n elementos tomados de k en k , P_n^k (y tiene que ser $k \leq n$).

Si cada caja puede contener más de una bola, el número de disposiciones diferentes es el de permutaciones con repetición, PR_n^k .

Si las bolas no son distinguibles (sólo diferenciamos dos disposiciones por el número de bolas en cada caja), tenemos CR_n^k disposiciones diferentes, y en el caso de que cada caja pudiese contener sólo una bola, habría C_n^k bolas.

Este ejemplo tiene una aplicación interesante a la física de partículas. El estado macroscópico de un sistema de k partículas se identifica dando el nivel energético de cada una de ellas (y cada una puede estar en $n > k$ niveles). Así entonces, cada estado se corresponde con una manera de poner k bolas (las partículas) en n cajas (los niveles). En el modelo de Maxwell-Boltzmann, se asume que las partículas son distinguibles (no es lo mismo que la partícula 1 tenga nivel a y la 2 nivel b , que la 1 tenga nivel b y la 2 nivel a) de manera que hay PR_n^k estados diferentes. En el modelo de Bose-Einstein, se considera que las partículas no son distinguibles, de manera que el número de estados es CR_n^k . En el modelo de Fermi-Dirac se asume que las partículas son indistinguibles y que cumplen el principio de exclusión de Pauli, según el cual dos partículas diferentes no pueden estar en el mismo estado. El número de estados es entonces C_n^k . Cada una de estas hipótesis corresponde al comportamiento empírico de diferentes tipos de partículas subatómicas.

Ejercicio 2.2. ¿De cuántas maneras se pueden poner $k > n$ bolas en n cajas de manera que cada caja contenga al menos una bola si a) las bolas son distinguibles, b) las bolas no son distinguibles?

Ejercicio 2.3. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir k tareas en n procesadores de manera que cada procesador tenga asignada como mucho una tarea?

2.3 Propiedades de los coeficientes binomiales

Como ya hemos comentado antes, los coeficientes binomiales aparecen con tanta frecuencia que resulta interesante conocer algunas de sus propiedades. En las demostraciones de estas propiedades usaremos siempre que sea posible argumentos combinatorios, aunque no sean, en muchos casos, la única vía de demostración. Hasta que no se indique lo contrario, supondremos siempre que, en la expresión $\binom{n}{k}$, n y k son enteros no negativos y que $k \leq n$.

Si tenemos en cuenta que $\binom{n}{k}$ cuenta el número de palabras de longitud n con exactamente k ceros y $n - k$ unos, está claro que la elección de la posición de los k ceros determina la de los

$n - k$ unos, de manera que

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (2.3)$$

Esta es la *propiedad de simetría* de los coeficientes binomiales, y dice que la sucesión

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$$

tiene una simetría central. Los primeros y últimos términos de la sucesión son $1, n, n(n-1)/2, \dots$ y $\dots, n(n-1)/2, n, 1$ respectivamente. Comparando dos términos consecutivos, tenemos

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} = \frac{k+1}{n-k} \begin{cases} < 1 & \text{si } k < \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \\ \geq 1 & \text{si } k \geq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \end{cases}$$

de manera que la sucesión anterior crece para $0 \leq k \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ y decrece para $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1 \leq k \leq n$. Si n es par, el valor más grande es $\binom{n}{n/2}$, mientras que si n es impar, los términos más grandes son $\binom{n}{(n-1)/2} = \binom{n}{(n+1)/2}$.

Hay un algoritmo clásico para calcular $\binom{n}{k}$ para valores moderados de n que se llama *triángulo de Pascal* (o también *triángulo de Tartaglia*) y que se basa en la siguiente propiedad de los coeficientes binomiales:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, \quad 0 < k < n \quad (2.4)$$

Esta es la *propiedad de la adición* de los coeficientes binomiales. Desde el punto de vista combinatorio, la expresión se puede deducir de la manera siguiente. La familia de subconjuntos de tamaño k de un conjunto X de tamaño n se puede partir en dos subfamilias: la de los subconjuntos que *no* contienen un cierto elemento $a \in X$, de los cuales hay tantos como elecciones de k elementos entre los $n-1$ que quedan, $\binom{n-1}{k}$, y la de los que contienen a , tantos como elecciones de $k-1$ elementos entre los $n-1$ diferentes de a , $\binom{n-1}{k-1}$. De aquí la igualdad 2.4.

Usando la relación anterior, se pueden disponer los números combinatorios en un triángulo

$$\begin{array}{cccccc} & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} \\ & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \end{array}$$

donde el primer y el último número de cada fila valen 1 y cada uno de los otros es la suma de los dos que tiene encima en la fila anterior. Numéricamente,

$$\begin{array}{cccc}
 & & 1 & 1 \\
 & & 1 & 2 & 1 \\
 & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1
 \end{array}$$

La identidad 2.4 permite obtener otras expresiones combinatorias. Usándola de forma iterada podemos escribir

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \\
 &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} = \\
 &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-2} + \binom{n-3}{k-3} \\
 &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \cdots + \binom{n-k}{1} + \binom{n-k-1}{0}
 \end{aligned}$$

Esta igualdad se puede expresar de una manera más legible poniendo $n+k+1$ en el lugar de n :

$$\sum_{i=0}^k \binom{n+i}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \cdots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k} \quad (2.5)$$

que proporciona la suma de coeficientes binomiales contiguos en los cuales la parte superior y la inferior difieren siempre en una constante (n en la expresión anterior), motivo por el cual nos referiremos a ella como la *propiedad de la adición paralela*. Sobre el Triángulo de Pascal, esta suma es la de los términos de un segmento de diagonal como en la figura 2.2.

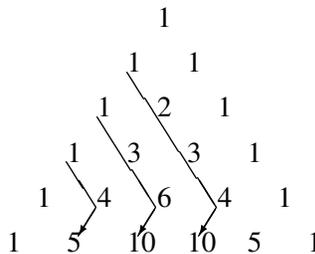


Figura 2.2: La propiedad de la adición paralela

Como el triángulo de Pascal tiene un eje de simetría central, se tendría que poder obtener una fórmula similar a la igualdad 2.5 aplicando esta simetría sobre las diagonales de la

figura 2.2. Efectivamente, de esta manera se obtiene la fórmula

$$\sum_{i=k}^n \binom{i}{k} = \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} \quad (2.6)$$

que proporciona la suma de coeficientes binomiales contiguos en los que el índice superior sigue el índice de sumación y el inferior es constante, y que llamaremos *propiedad de la adición superior*. Sobre el Triángulo de Pascal, esta propiedad corresponde a sumas diagonales como las de la figura 2.3.

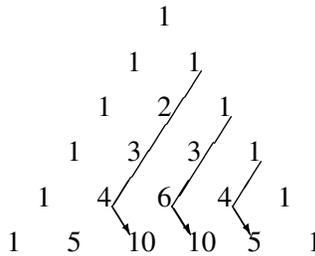


Figura 2.3: La propiedad de la adición superior

Ejercicio 2.4. Obtener la propiedad de la adición superior de las dos maneras siguientes.

1. Usando la propiedad de adición como para obtener la igualdad 2.4, pero descomponiendo el otro sumando.
2. Con el argumento combinatorio siguiente. Tenéis un conjunto de $n + 1$ bolas numeradas de 0 a n y formáis la familia de subconjuntos de tamaño $k + 1$. Esta familia se puede partir en las subfamilias formadas por los subconjuntos que tienen la bola más alta numerada i , $i = k, k + 1, \dots, n$.

Las dos propiedades anteriores son muy similares y tienen diversas aplicaciones particulares. Por ejemplo, para $n = 1$ obtenemos,

$$\sum_{i=0}^{k-1} \binom{1+i}{i} = 1 + 2 + \cdots + (k-1) + k = \binom{k+1}{k-1} = \binom{k+1}{2} = \frac{k(k+1)}{2} \quad (2.7)$$

que proporciona una fórmula para la suma de los k primeros naturales. Los números que se obtienen, $\binom{k+1}{2}$, se llaman *números triangulares* porque cuentan el número de términos en las n primeras líneas del triángulo de Pascal (o en una disposición triangular de bolas). Los primeros son los de la figura 2.4.

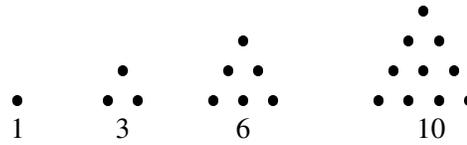


Figura 2.4: Representación geométrica de los primeros números triangulares

La fórmula 2.6 para $k = 2$ da la expresión

$$\sum_{i=2}^n \binom{i}{2} = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}$$

que corresponde a la suma de los n primeros números triangulares. Por similitud con éstos, los números $\binom{n+1}{3}$ se llaman *números piramidales*, ya que cuentan el número de elementos de una pirámide de base triangular y $n - 1$ pisos, siendo el piso i un triángulo como los de la figura 2.4. La suma de números piramidales daría también el número de puntos de un objeto ... en cuatro dimensiones.

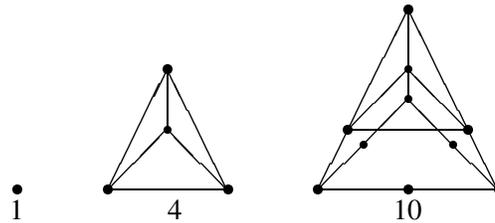


Figura 2.5: Representación geométrica de los primeros números piramidales

Expresiones más complejas involucran sumas de productos de coeficientes binomiales. La más conocida de estas expresiones es la *convolución de Vandermonde*,

$$\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k} \quad (2.8)$$

que se deduce con el argumento combinatorio siguiente. Para obtener todos los subconjuntos de tamaño k de un conjunto de n bolas blancas y m bolas negras, podemos formar todos los que no tienen ninguna bola blanca (los hay $\binom{n}{0} \binom{m}{k}$), los que tienen una (los hay $\binom{n}{1} \binom{m}{k-1}$) y

así sucesivamente hasta los que tienen todas las bolas blancas (contando que, cuando $a < b$, entonces $\binom{a}{b} = 0$). Observemos que, para $m = 1$, reobtenemos la fórmula de adición.

Los coeficientes multinomiales se pueden obtener también como productos de coeficientes binomiales. Recordemos que

$$\binom{k}{k_1, \dots, k_n} = \frac{k!}{k_1! \cdots k_n!}, \quad k = k_1 + \cdots + k_n$$

cuenta el número de permutaciones de n elementos en las cuales se repite k_i veces el elemento i . Para contar este número podíamos haber hecho lo siguiente. Escogemos primero las k_1 posiciones del elemento 1 (hay $\binom{k}{k_1}$ maneras de hacerlo). Después escogemos las k_2 posiciones del elemento 2 en las posiciones que quedan (de $\binom{k-k_1}{k_2}$ maneras) y así sucesivamente para obtener,

$$\binom{k}{k_1, \dots, k_n} = \binom{k}{k_1} \binom{k-k_1}{k_2} \binom{k-k_1-k_2}{k_3} \cdots \binom{k_n}{k_n} \quad (2.9)$$

Por ejemplo,

$$\binom{k}{k_1, k_2} = \binom{k}{k_1} \binom{k-k_1}{k_2}$$

Ejercicio 2.5. Demostrar la identidad

$$\binom{k}{k_1} \binom{k_1}{k_2} = \binom{k}{k_2} \binom{k-k_2}{k_1-k_2}$$

La fórmula del binomio

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \cdots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

permite también obtener diversas expresiones con números combinatorios. Poniendo $a = b = 1$ obtenemos

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n \quad (2.10)$$

En términos de conjuntos, la identidad dice que un conjunto de n elementos tiene un total de 2^n subconjuntos, que es también el número de palabras de longitud n que se pueden formar con ceros y unos y también la suma de todos los coeficientes binomiales de una línea horizontal del Triángulo de Pascal.

Poniendo $a = 1$ y $b = -1$ en la fórmula binomial se obtiene

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} + (-1)^n \binom{n}{n} = 0 \quad (2.11)$$

es decir, que la suma con signos alternados de cada línea del Triángulo de Pascal da cero, otra consecuencia de su simetría central.

Acabamos esta sección con algunos comentarios sobre la fórmula del binomio. Tal como ha sido escrita y deducida, la fórmula sólo es válida para valores de n naturales. Lo que resulta más sorprendente es que, con una extensión adecuada (pero bien natural) de los coeficientes binomiales $\binom{x}{k}$ para valores reales de x , Newton obtuvo una fórmula del binomio válida para cualquier potencia (negativa, fraccionaria o irracional). En la definición del coeficiente binomial, podemos escribir, para n y k enteros no negativos,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

La parte derecha de esta igualdad permite definir $\binom{x}{k}$ para x real de la manera siguiente,

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!} \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.12)$$

Así, por ejemplo,

$$\binom{-2}{3} = \frac{(-2)(-3)(-4)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = -4$$

o

$$\binom{1/2}{3} = \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{2^4}$$

Observemos que si x es un entero menor que k , el numerador en la expresión 2.12 es cero. En esta definición, el miembro inferior del coeficiente binomial, k , es siempre un entero no negativo. Se puede generalizar la definición para todos los enteros poniendo

$$\binom{x}{k} = 0 \quad k \text{ entero negativo}$$

Hay una relación precisa entre esta generalización de los coeficientes binomiales y la versión original cuando x es un entero negativo, $x = -n$. Esta relación, llamada *propiedad de inversión*, se obtiene de la manera siguiente,

$$\begin{aligned} \binom{-n}{k} &= \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!} = \\ &= (-1)^k \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!} = \\ &= (-1)^k \binom{n+k-1}{k} \end{aligned}$$

La fórmula es, de hecho, simétrica, de manera que se puede escribir

$$\binom{r}{k} = (-1)^k \binom{k-r-1}{k} \quad r \in \mathbb{Z} \quad (2.13)$$

Ejercicio 2.6. Hemos demostrado la fórmula anterior cuando r es un entero negativo. Demos-trarla cuando r es un entero positivo.

Esta extensión de los coeficientes binomiales permite generalizar la fórmula del binomio a cualquier entero, positivo o negativo. Recordemos que en la fórmula 2.2 de la sección anterior habíamos obtenido,

$$(1 + a + a^2 + a^3 + \dots)^n = \sum_{i \geq 0} \binom{n+i-1}{i} a^i$$

Cada uno de los factores es la suma de una serie geométrica de razón a . Si $0 < a < 1$, esta suma vale $\frac{1}{1-a}$, de manera que, usando la ecuación anterior, se puede escribir

$$(1 + a)^{-n} = \left(\frac{1}{(1 - (-a))} \right)^n = \sum_{k \geq 0} \binom{n+k-1}{k} a^k (-1)^k$$

donde ahora el sumatorio de la derecha tiene una cantidad no finita de términos. Usando la fórmula de inversión, podemos escribir

$$(1 + a)^r = \sum_{k \geq 0} \binom{r}{k} a^k \quad r \in \mathbb{Z} \quad (2.14)$$

que proporciona una generalización de la fórmula del binomio para cualquier entero r . Si r es positivo, los términos del sumatorio con el índice inferior k más grande que r son nulos y el sumatorio tiene de hecho $r + 1$ términos, mientras que si r es negativo, el sumatorio tiene infinitos términos.

Se puede demostrar (usando el desarrollo en serie de Taylor de la función $f(x) = (1+x)^r$ alrededor del origen) que la fórmula 2.14 es válida para cualquier valor real de r . En un capítulo posterior, al tratar funciones generadoras, usaremos esta fórmula y comentaremos qué papel juega la convergencia de la serie que se obtiene.

Notas bibliográficas

Desde un punto de vista histórico, el desarrollo inicial de la combinatoria elemental se produjo con el nacimiento del cálculo de probabilidades, a finales del siglo XVII y en relación sobre todo a problemas relacionados con los juegos de azar. Una de las primeras obras que sistematiza los

primeros resultados en el cálculo de probabilidades, el *Ars conjectandi* de J. Bernouilli (1713), contiene ya una expresión de la fórmula del binomio que después generalizará Newton. Este origen hace que en muchos textos de probabilidad haya una buena introducción a esta parte de la combinatoria. Un ejemplo excelente en este sentido es el del libro de Feller [3].

El material cubierto en este capítulo se puede encontrar en cualquier texto elemental de combinatoria o de matemática discreta. El libro de Anderson [1] contiene una exposición a nivel sencillo, mientras que en el de Berge [2] se hace una exposición más compacta. En lo que respecta a las propiedades de los números combinatorios, el texto de Graham, Knuth y Patashnik [4] es una referencia completa y de lectura agradecida.

Bibliografía

- [1] I. Anderson. *Introducción a la Combinatoria*, Ed. Vicens Vives, 1992.
- [2] C. Berge. *Principes de Combinatorie*, Dunod, Paris, 1968.
- [3] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and its Applications* (Vol. I), Wiley Interscience, 1968.
- [4] R. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik. *Concrete Mathematics*, Addison Wesley, 1989.

Problemas

1. Queremos codificar los símbolos alfanuméricos (28 letras y 10 cifras) en palabras de una cierta longitud k de un alfabeto binario $A = \{0, 1\}$. ¿Cuál es la mínima longitud necesaria para poderlo hacer?
2. ¿Es suficiente con palabras de hasta 4 de longitud para representar todas las letras del alfabeto ordinario en lenguaje Morse (el lenguaje Morse dispone sólo de dos símbolos: punto y raya)?
3. ¿De cuántas maneras se pueden escoger tres números del 1 al 9 de manera que no salgan dos consecutivos?
4. Las placas de matrícula tienen cuatro dígitos numéricos seguidos de dos alfabéticos. ¿Cuántos coches se pueden matricular? Una vez se han agotado, se propone que las matrículas puedan estar formadas por seis dígitos alfanuméricos (es decir, cifras del 0 al 9 o letras de la A a la Z). ¿Cuántas matrículas nuevas se pueden hacer? Una vez agotadas éstas, ¿qué estrategia proporcionaría más matrículas nuevas, hacer matrículas con 7 dígitos, o bien añadir un símbolo al alfabeto?

5. ¿Cuántos números hay entre 100 y 900 que tengan las cifras diferentes? ¿Cuántos números más grandes que 6600 con todas las cifras diferentes y sin ninguna de las cifras 7, 8 ni 9?
6. ¿Cuántas palabras de longitud 4 se pueden formar con las cinco vocales sin que se repita ninguna? ¿Y de longitud 5 (también sin que se repita ninguna)?
7. Un código de colores con barras usa 6 colores para pintar 4 barras, pero dos barras consecutivas no pueden tener el mismo color. ¿Cuántas palabras diferentes se pueden formar?
8. En un alfabeto de 10 consonantes y 5 vocales, ¿cuántas palabras de cinco letras sin dos vocales seguidas ni tres consonantes seguidas se pueden formar?
9. La música serial se basa en el principio de que en cualquier línea melódica han de aparecer los 12 tonos de la escala antes de repetirse alguno. ¿Cuántas líneas melódicas de 12 notas se pueden formar según este principio?
10. En problemas de diseño de redes de interconexión se suelen usar grafos que tienen por vértices palabras de un alfabeto. Por ejemplo, los llamados grafos de Kautz tienen por vértices las palabras de longitud k que se pueden formar de un alfabeto de n símbolos con la condición que dos letras consecutivas no pueden ser iguales. ¿Cuántas de estas palabras hay?
11. Sea $A = \{1, 2, \dots, n\}$ y $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ un conjunto de k símbolos. Una aplicación $f : X \rightarrow A$ es *ordenada* si $f(x_1) \leq f(x_2) \leq \dots \leq f(x_k)$ y *estrictamente ordenada* si las desigualdades son estrictas. ¿Cuántas aplicaciones ordenadas y cuántas estrictamente ordenadas hay de X en A ?
12. En una reunión de una empresa hay ocho representantes de los accionistas, seis representantes de acreedores, cuatro representantes de los trabajadores y tres técnicos. Para resolver más ágilmente la organización de la reunión deciden nombrar una comisión formada por tres representantes de los accionistas, dos representantes de acreedores, un representante de los trabajadores y un técnico. ¿Cuántas comisiones diferentes se podrían formar? Si uno de los accionistas se niega en rotundo a formar parte de la comisión con dos de los representantes de los trabajadores, a los cuales tiene manía, ¿cuántas comisiones se podrían formar?
13. Una empresa de sondeos escoge una muestra de 20 estudiantes al azar de entre una comunidad de 500 estudiantes para hacer una encuesta. ¿Cuántas muestras diferentes puede obtener? Uno de los estudiantes está encantado de que le pasen la encuesta. ¿Cuántas de estas muestras contienen a este estudiante?

14. ¿De cuántas maneras se pueden poner n bolas numeradas en k cajas numeradas de manera que en cada caja haya al menos una bola? ¿Y si las bolas no están numeradas?
15. Usando la propiedad de inversión, demostrar que la suma parcial de los términos de una línea del Triángulo de Pascal con los signos alternados vale

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{n}{i} = (-1)^k \binom{n-1}{k}$$

16. Demostrar la identidad

$$\sum_{i=0}^k \binom{k+r}{i} x^i y^{k-i} = \sum_{i=0}^k \binom{-r}{i} (-x)^i (x+y)^{k-i}$$

Usando esta identidad para $x = -1$ e $y = 1$, o bien, $x = y = 1$ y $r = k + 1$, obtener, respectivamente,

$$\sum_{i=0}^k \binom{k+r}{i} (-1)^i = \binom{-r}{k}, \quad k \text{ entero positivo,}$$

$$\sum_{i=0}^k \binom{2k+1}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{k+i}{i} 2^{k-i} = 2^k$$

Capítulo 3

Principios básicos de enumeración

1. Cardinales de conjuntos
2. Principio de inclusión-exclusión
3. Biyecciones
4. Principio del palomar y teorema de Ramsey

En este capítulo se describen y desarrollan algunos principios básicos de enumeración que, a pesar de ser de una gran simplicidad, se convierten en herramientas sistemáticas útiles en problemas combinatorios cuyo uso puede llegar a ser importante. Algunos de estos principios se han usado de manera implícita en el capítulo anterior.

En la primera sección se describen algunas relaciones entre operaciones entre conjuntos y sus cardinales. Una de estas relaciones, la del cardinal de la unión de conjuntos, da lugar al llamado *principio de inclusión-exclusión*, que se describe en la sección 2. Como ejemplo de una aplicación relativamente sofisticada de este principio, se tratan la función ϕ de Euler y el llamado problema de los *desarreglos*. En la sección 3 se da una ilustración de cómo se pueden relacionar estructuras aparentemente inconexas para enumerarlas más fácilmente. El ejemplo nos lleva a introducir los llamados *números de Catalan*, que tienen un interés combinatorio considerable. En el mismo contexto se introduce también el problema de las *particiones* de un entero positivo. En la última sección se desarrolla otro principio elemental, el llamado *principio del palomar*. En este caso no se trata de resolver un problema de enumeración, sino la existencia de una determinada configuración o propiedad combinatoria a través de hipótesis muy generales. Como aplicación de este principio simple se dan dos resultados clásicos, el teorema de Erdős-Szekeres y el teorema de Ramsey.

3.1 Cardinales de conjuntos

Los problemas de enumeración son de hecho problemas de cálculo de cardinales de conjuntos finitos. Por esto resulta interesante conocer cómo se traducen las operaciones usuales entre conjuntos en operaciones aritméticas entre los respectivos cardinales. En esta sección veremos algunas situaciones sencillas en las cuales esta traducción es posible.

Si A es un conjunto finito, $|A|$ denota el número de elementos, o cardinal, de A .

Como consecuencia directa de la definición de unión de conjuntos, tenemos:

Principio de adición. Sean A y B dos conjuntos finitos disyuntos, $A \cap B = \emptyset$. Entonces

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

Este resultado se extiende por inducción al caso de r conjuntos si son disyuntos dos a dos: Si A_1, A_2, \dots, A_k son conjuntos finitos y $A_i \cap A_j = \emptyset$ para cualquier par de índices $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$, entonces

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_k|$$

Para la intersección no hay una relación general que ligue $|A \cap B|$ con $|A|$ y $|B|$. Sí que la hay en cambio para la complementación. Si Ω es un conjunto finito y $A \subset \Omega$, denotamos por $\Omega \setminus A$ el complemento de A en Ω (es decir, el conjunto de elementos de Ω que no están en A).

Proposición 3.1. Sea Ω un conjunto finito y $A \subset \Omega$. Entonces,

$$|\Omega \setminus A| = |\Omega| - |A|$$

Demostración. Podemos escribir Ω como la unión disyunta $A \cup (\Omega \setminus A)$, de manera que, por el principio de adición, $|\Omega| = |A| + |\Omega \setminus A|$. \square

Esta última proposición se usa generalmente cuando resulta más sencillo calcular el cardinal del complemento de un subconjunto que el del propio subconjunto. Por ejemplo, el número de palabras de cinco letras que contienen al menos una vocal se calcula fácilmente como el total de palabras menos las que no tienen ninguna vocal, $5^{27} - 5^{22}$.

Una de las operaciones entre conjuntos que admite una traducción directa en términos de cardinales es la del producto cartesiano.

Proposición 3.2. Sean A y B dos conjuntos finitos y $A \times B$ su producto cartesiano. Entonces,

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Demostración. El producto cartesiano se puede escribir como la unión disyunta $A \times B = \bigcup_{a \in A} \{a\} \times B$, donde cada uno de los términos de la unión tiene cardinal $|B|$ y los hay tantos como elementos de A . \square

La proposición anterior se puede extender por inducción a cualquier número finito de factores. Si A_1, \dots, A_r son conjuntos finitos, entonces

$$|A_1 \times \dots \times A_r| = |A_1| \cdots |A_r|$$

Observemos que, si $A = \{x_1, \dots, x_n\}$, el producto cartesiano r veces $A \times \dots \times A$ tiene por elementos las permutaciones con repetición de los elementos de A tomados de r en r , de manera que reencontramos el resultado

$$PR_n^r = \underbrace{|A \times \dots \times A|}_r = |A|^r = n^r$$

El resultado de la proposición anterior se conoce a veces como la *regla del producto* y se expresa diciendo que, si para realizar un proceso en dos etapas hay n_1 maneras de hacer la primera y, para cada una de ellas, n_2 de realizar la segunda, entonces el número total de maneras de realizar el proceso es el producto $n_1 n_2$. Si llamamos A al conjunto de maneras de realizar la primera etapa y B al conjunto de maneras de realizar la segunda, el conjunto de maneras de realizar el proceso es $A \times B$. Este es el procedimiento que se ha usado en el capítulo anterior para calcular el número de permutaciones. Por ejemplo, las permutaciones de n elementos sin repetición se pueden formar en un proceso de n etapas. En la primera hay n elecciones posibles del primer elemento, en la segunda $n - 1$ elecciones, y así sucesivamente hasta la última que admite una única opción, de manera que el número total de permutaciones es el producto $n!$.

3.2 Principio de inclusión-exclusión

En la sección anterior se ha relacionado el cardinal de la unión de dos conjuntos disyuntos con el cardinal de cada uno de ellos a través de la igualdad $|A \cup B| = |A| + |B|$. Cuando los conjuntos no son disyuntos se puede obtener una fórmula que hace intervenir el cardinal de la intersección.

Proposición 3.3. Sean A y B dos conjuntos finitos. Entonces,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Demostración. La unión $A \cup B$ se puede poner como la unión disyunta,

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$$

donde $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$ y $|B \setminus A| = |B| - |B \cap A|$. Usando ahora el principio de adición, se obtiene la expresión del enunciado. \square

El llamado *principio de inclusión-exclusión* es una extensión de este resultado al caso de la unión de n conjuntos y tiene una expresión un poco más compleja. La deducimos primero para el caso de la unión de tres conjuntos, $A \cup B \cup C$. En la figura 3.1 está representada la situación con diagramas de Venn.

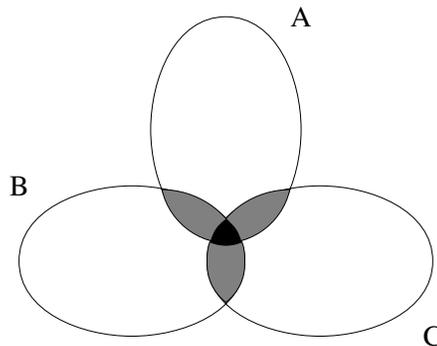


Figura 3.1: La unión $A \cup B \cup C$

Si los tres conjuntos fuesen disyuntos, tendríamos $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C|$. Si no lo son, en la expresión $|A| + |B| + |C|$ se cuentan dos veces los elementos que están en la intersección de sólo dos de los tres subconjuntos (los de la zona cuadrículada en la figura) y tres veces los elementos de $A \cap B \cap C$ (los de la zona rayada de la figura). Restando los cardinales de $A \cap B$, $A \cap C$ y $B \cap C$, habremos descontado una vez los elementos que están en la zona cuadrículada, pero también habremos descontado tres veces los elementos que están en $A \cap B \cap C$. Sumando una vez el cardinal de esta zona rayada obtenemos,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

La fórmula general de inclusión-exclusión tiene un aspecto similar y se puede razonar de la misma manera, aunque aquí haremos una demostración diferente. El nombre de inclusión-exclusión proviene del hecho de que en la expresión de la derecha hay elementos que se van incluyendo y excluyendo alternativamente.

Proposición 3.4 (Principio de inclusión-exclusión). Sean A_1, A_2, \dots, A_n conjuntos finitos.

Entonces,

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{r-1} \sum_{i_1 < \cdots < i_r} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_r}| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| \quad (3.1)$$

Demostración. Sólo es preciso comprobar que cada elemento de la unión se cuenta una sola vez en la expresión de la derecha de la igualdad. Supongamos que $x \in A_1 \cup \cdots \cup A_n$ es un elemento que está exactamente en $p \leq n$ de los n conjuntos, $x \in A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_p}$. Entonces x está contado $p = \binom{p}{1}$ veces en el primer sumando $\sum_{i=1}^n |A_i|$. En el segundo sumando, $\sum_{i<j} |A_i \cap A_j|$, está contado una vez para cada elección de dos de los subconjuntos A_{i_1}, \dots, A_{i_p} , es decir, $\binom{p}{2}$ veces. En general, en el sumando r -ésimo el elemento x está contado $\binom{p}{r}$ veces mientras $r \leq p$ y ninguna vez si $r > p$. Por tanto, el elemento x está contado

$$\binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \cdots + (-1)^{r-1} \binom{p}{r} + \cdots + (-1)^{p-1} \binom{p}{p}$$

De acuerdo con la fórmula 2.11 de las propiedades de los números binomiales que hemos deducido en el capítulo anterior, esta expresión vale $\binom{p}{0} = 1$. \square

Ejercicio 3.5. Demostrar el principio de inclusión-exclusión por inducción sobre el número de conjuntos en la unión.

Desde el punto de vista de la notación, el principio de inclusión-exclusión se puede expresar de una manera más compacta, pero también más críptica. Sea $K = \{1, 2, \dots, n\}$ el conjunto de los subíndices. Para cada $T \subset K$ llamamos $N(T) = |\cap_{i \in T} A_i|$. Entonces, la fórmula 3.1 se puede escribir

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{T \subset K} (-1)^{|T|+1} N(T) \quad (3.2)$$

donde el sumatorio se extiende a todos los subconjuntos de K .

A continuación veremos algunos ejemplos de aplicación de este principio.

La criba de Eratóstenes

El principio de inclusión-exclusión fue originalmente formulado en términos diferentes por Sylvester (1800–1850) inspirado en un método atribuido a Eratóstenes (siglo V aC) para encontrar los números primos. El método de Eratóstenes consiste en hacer una lista de números naturales de 1 a n . Se comienza marcando el 1 y todos los números pares (múltiplos de 2)

más grandes que 2. A continuación se busca el primer número sin marca (el 3) y se marcan todos los múltiplos de 3 más grandes que 3. Se busca el primer número sin marca (el 5) y se marcan todos los múltiplos de 5 más grandes que 5. Prosiguiendo de esta manera hasta agotar los números de la lista, todos los que no llevan marca son números primos. Para encontrar los números primos del 1 al 20, las fases del proceso serían,

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

El proceso continúa marcando los múltiplos de 5, 7, 11, 13, 17 y 19, que no producen nuevas marcas en la lista, de manera que los números sin marcas en la última lista son números primos.

La versión de Sylvester es una generalización de este método. Supongamos que los N elementos de un conjunto Ω pueden tener hasta k propiedades diferentes p_1, \dots, p_k (en el método de Eratóstenes las propiedades son ‘ser divisible por 2’, ‘ser divisible por 3’, etc.). Supongamos que queremos contar cuántos de los elementos *no* tienen ninguna de las propiedades. Si $T = \{i_1, \dots, i_r\} \subset K = \{1, 2, \dots, k\}$, llamamos $N(T)$ al número de elementos que tienen las propiedades p_{i_1}, \dots, p_{i_r} . El número de elementos que no tiene ninguna de las propiedades es $N(\emptyset)$. Entonces,

$$N(\emptyset) = N - \sum_{T \subset K} (-1)^{|T|} N(T) \quad (3.3)$$

Esta expresión se obtiene de la proposición 3.4 simplemente llamando A_i al conjunto de los elementos que tienen la propiedad p_i . Entonces, el número que se busca es el cardinal del conjunto de elementos que no están en ninguno de los A_i , es decir,

$$N(\emptyset) = |\Omega \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_k)| = |\Omega| - |A_1 \cup \dots \cup A_k|$$

Esta es la forma con que se enuncia habitualmente el principio de inclusión-exclusión. Enunciado de esta manera se puede dar la generalización siguiente. Para cada $r = 1, \dots, k$, llamamos $N_r = \sum_{T \subset K, |T|=r} N(T)$. Entonces:

Proposición 3.6. El número de elementos de un conjunto X que tienen exactamente r de las propiedades p_1, \dots, p_k es

$$N(r) = N_r - N_{r+1} + \dots + (-1)^{k-r} N_k$$

Ejercicio 3.7. Demostrar esta última proposición.

Ejercicio 3.8. ¿Cuántos números hay entre 1 y 1000 que no sean divisibles ni por 3 ni por 7?

En particular, si para $r = 0$ definimos $N_0 = N$, la proposición 3.6 permite tener la fórmula de inclusión-exclusión expresada aún de otra manera,

$$N(0) = N - N_1 + \cdots + (-1)^r N_r + \cdots + (-1)^k N_k \quad (3.4)$$

Ejercicio 3.9. Demostrar que los r primeros sumandos de la ecuación 3.4 proporcionan una cota *superior* de $N(0)$ si r es impar y una cota *inferior* si r es par.

La función ϕ de Euler

Un problema relacionado con el anterior es el de contar cuántos números hay entre 1 y n que sean relativamente primos con n , es decir, que no tengan ningún divisor diferente del 1 en común con n . La función que da este número para cada n se llama *función ϕ de Euler* y juega un papel importante en la teoría de números. Por ejemplo, los primeros valores de ϕ son $\phi(1) = \phi(2) = 1$, $\phi(3) = \phi(4) = 2$ y $\phi(5) = 4$. Obtendremos ahora una expresión de $\phi(n)$ usando el principio de inclusión-exclusión. Un resultado básico de aritmética (el teorema de factorización) establece que cada número admite una descomposición única como producto de números primos,

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

Cualquier divisor de n debe ser dividido por uno o más de los números primos que aparecen en su descomposición. Llamamos A_i al conjunto de números entre 1 y n divisibles por p_i . Los números relativamente primos con n no tienen divisores comunes con n , de manera que son precisamente los que no están en ninguno de los conjuntos A_i . Así entonces,

$$\phi(n) = n - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k|$$

donde el cardinal de esta unión se puede calcular usando el principio de inclusión-exclusión. Para ello, observemos que los números entre 1 y n divisibles por p son $p, 2p, 3p, \dots$ hasta llegar a n y los hay por tanto n/p . Así entonces,

$$\begin{aligned} |A_i| &= \frac{n}{p_i}, \\ |A_i \cap A_j| &= \frac{n}{p_i p_j}, \quad i \neq j \\ &\vdots \\ |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k| &= \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_k} \end{aligned}$$

Entonces,

$$\phi(n) = n - \sum_i \frac{n}{p_i} + \sum_{i < j} \frac{n}{p_i p_j} - \cdots + (-1)^k \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_k} \quad (3.5)$$

Esta fórmula se expresa habitualmente de una manera más compacta como un producto en lugar de una suma,

$$\phi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \quad (3.6)$$

Ejercicio 3.10. Demostrar que efectivamente las expresiones 3.5 y 3.6 son equivalentes.

Ejercicio 3.11. Obtener la expresión de $\phi(n)$ cuando *i*) n es un número primo, *ii*) n es un producto de dos primos.

Ejercicio 3.12. Demostrar que si n y n' son enteros relativamente primos, entonces

$$\phi(nn') = \phi(n)\phi(n')$$

Una de las propiedades interesantes de la función ϕ es la siguiente:

Proposición 3.13. Sea D el conjunto de divisores de un número natural n . Entonces,

$$n = \sum_{d \in D} \phi(d)$$

Demostración. Si $X = \{1, 2, \dots, n\}$, llamamos $A_i = \{r \in X : \text{mcd}(r, n) = i\}$ (recordemos que mcd indica el máximo común divisor). Está claro que si i no divide a n entonces $A_i = \emptyset$, de manera que $X = \cup_{d \in D} A_d$ y que esta unión es disyunta. Así entonces,

$$n = |X| = \sum_{d \in D} |A_d|$$

Observemos que, para cada divisor $d \in D$, los elementos de A_d tienen la forma md , donde m es relativamente primo con n y $1 \leq m \leq n/d$. Por lo tanto, $|A_d| = \phi(n/d)$. Observemos finalmente que $\sum_{d \in D} \phi(n/d) = \sum_{d \in D} \phi(d)$. \square

Desarreglos

Una de las aplicaciones clásicas del principio de inclusión-exclusión es el llamado problema de los desarreglos. Una vez, un oficinista tenía que poner diez cartas dirigidas a diez clientes en sus respectivos sobres; como tenía mucha prisa, puso cada carta en un sobre sin mirar si coincidía el domicilio y resultó que ninguno de los clientes recibió la carta que le iba dirigida. El hombre pensó que había sido verdadera mala suerte no adivinar ni una. Tener mala suerte querría decir que, de todas las posibilidades, había relativamente pocas de que sucediese este completo desastre. En esta sección procuraremos evaluar la mala suerte del oficinista.

Consideremos la selección ordenada $12 \dots n$ de n símbolos y una permutación $a_1 a_2 \dots a_n$ de esta selección. Diremos que esta permutación es un *desarreglo* de la selección original si

ningún elemento está en su sitio. Por ejemplo, 4123 es un desarreglo de 1234, mientras que 1423 no lo es, ya que 1 está en su sitio. El problema que consideraremos es el de contar cuántos desarreglos se pueden formar de $12 \dots n$.

Llamaremos A_i al conjunto de todas las permutaciones de $12 \dots n$ que dejan el elemento i en su sitio. Entonces, el número D_n de desarreglos es el número de permutaciones que no están en ninguno de los conjuntos A_i , es decir,

$$D_n = n! - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$$

Otra vez, el cardinal de este último conjunto se puede calcular por el principio de inclusión-exclusión. Observemos que $|A_i| = (n-1)!$, ya que, si el elemento i se tiene que quedar en su sitio, nos quedan las permutaciones de los otros $n-1$ elementos. De manera similar, para cada una de las $\binom{n}{2}$ elecciones de pares i, j , $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$. En general, para cada una de las $\binom{n}{p}$ elecciones de p índices, $|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_p}| = (n-p)!$. Por tanto,

$$D_n = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! + \dots + (-1)^p \binom{n}{p}(n-p)! + \dots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

Esta expresión se puede escribir de una manera más sencilla como

$$D_n = n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + (-1)^p \frac{1}{p!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right]$$

Observemos que, escrita de esta manera, la expresión entre corchetes es la suma parcial n -ésima de

$$\frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + (-1)^p \frac{1}{p!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} + \dots = \sum_{i \geq 0} \frac{(-1)^i}{i!}$$

Las primeras sumas parciales de esta serie numérica son

$$1, 0, 0.5, 0.33, 0.375, 0.366, 0.3680, 0.3678, \dots$$

que convergen rápidamente hacia $1/e$. De esta manera, para n ‘grande’, se puede poner que D_n es aproximadamente igual a $n!/e$. Así, para valores de n grandes, la proporción de desarreglos sobre el total de permutaciones es aproximadamente $1/e$. Para el caso de los 10 sobres del oficinista, hay 1.334.961 desarreglos entre las $10! = 3.628.800$ permutaciones posibles, de manera que la proporción de desarreglos es 0.36787946 (mientras que $1/e$ es 0.36787944...). Esto puede ser una medida de su mala suerte: aproximadamente un 37% de las posibilidades son desarreglos.

Ejercicio 3.14. ¿Cuántas permutaciones de $12 \dots n$ hay que tengan el 1 y el 2 en su sitio? ¿Cuántas permutaciones de $12 \dots n$ hay en las cuales exactamente r elementos están en su sitio?

Ejercicio 3.15. Un tarotólogo afirma tener poderes telepáticos. Para probarlo pide que se reordenen seis cartas sobre la mesa y dice que adivinará cuáles son con los ojos cerrados. Si adivina 3 de las 6 cartas, ¿se puede decir que ha sido por azar o esto demuestra efectivamente una habilidad especial?

3.3 Biyecciones. Números de Catalan. Particiones

En esta sección veremos otro principio elemental de enumeración que, como los que hemos visto anteriormente, permite edificar técnicas relativamente sofisticadas desde una observación casi trivial.

Una manera de contar los elementos de un conjunto es relacionarlos con los de un conjunto que ya sabemos contar. En particular, si se puede describir una biyección $\phi : A \rightarrow B$ entre los conjuntos A y B , los dos conjuntos tienen el mismo número de elementos. En esta sección desarrollaremos aplicaciones de este principio.

La construcción de biyecciones para conseguir enumerar los elementos de un conjunto se ha usado anteriormente de manera implícita en diversas ocasiones. Recordemos, por ejemplo, como se obtenía en el capítulo anterior la fórmula de enumeración de las combinaciones con repetición de n elementos tomados de k en k , CR_n^k . Si A es el conjunto de estas combinaciones, establecíamos una biyección de A en el conjunto B de todas las secuencias de longitud $n+k-1$ con exactamente n ceros y $k-1$ unos. Esta biyección estaba definida con la regla

$$\begin{array}{c} \underbrace{11\dots 1}_{k_1} \underbrace{22\dots 2}_{k_2} \dots \underbrace{nn\dots n}_{k_n} \\ \updownarrow \\ \underbrace{00\dots 0}_{k_1} 1 \underbrace{00\dots 0}_{k_2} 1 \dots 1 \underbrace{00\dots 0}_{k_n} \end{array}$$

A continuación se establecía una biyección entre B y el conjunto C de todos los subconjuntos de tamaño $k-1$ de un conjunto $X = \{x_1, \dots, x_{n+k-1}\}$ de $n+k-1$ elementos de acuerdo con la asociación

$$\begin{array}{c} \alpha = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n+k-1} \quad \alpha_i \in \{0, 1\}, \quad \sum_i \alpha_i = k-1 \\ \updownarrow \\ X_\alpha = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{k-1}}\} \subset X, \quad x_i \in X_\alpha \Leftrightarrow \alpha_i = 1 \end{array}$$

Este último conjunto tiene $\binom{n+k-1}{k-1}$ elementos, de manera que obteníamos el número CR_n^k de combinaciones con repetición de n elementos tomados de k en k como

$$CR_n^k = |A| = |B| = |C| = \binom{n+k-1}{k-1}$$

En esta sección ilustraremos el uso de esta técnica a través de dos ejemplos. En el primero introduciremos otros números combinatorios importantes, los *números de Catalan*, que permiten resolver algunos problemas de enumeración interesantes. El segundo trata el problema de las *particiones* de un entero. Estos dos temas volverán a ser tratados en el capítulo siguiente.

Números de Catalan

En una expresión aritmética con paréntesis debe haber tantos paréntesis abiertos como cerrados. Además, no se puede cerrar un paréntesis que no se haya abierto antes. Prescindiendo de todo lo que no sean paréntesis, una expresión como

$$()()$$

sería admisible, mientras que

$$)()()$$

no tiene corrección sintáctica.

Dado un cierto número $2n$ de paréntesis (n abiertos y n cerrados), contaremos cuántas expresiones correctas se pueden formar, entendiendo por correctas aquellas en que no se cierra un paréntesis que no se haya abierto. Llamamos A al conjunto de estas expresiones. Será más cómodo trabajar identificando un paréntesis abierto con 1 y un paréntesis cerrado con -1 . Entonces, se puede establecer una biyección entre A y el conjunto B de todas las selecciones ordenadas de 1 's y -1 's de longitud $2n$. La corrección sintáctica de los paréntesis se traduce en las secuencias x_1, x_2, \dots, x_{2n} , $x_i \in \{1, -1\}$ en que la suma de los primeros k dígitos no es nunca negativa y la suma de todos vale cero:

$$B = \{x_1, x_2, \dots, x_{2n} : x_i \in \{-1, 1\}, \sum_{i=1}^k x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{2n} x_i = 0\}$$

Para visualizar el problema de enumeración que queremos resolver, representaremos cada uno de los elementos de B como un camino de $(0, 0)$ a $(2n, 0)$ en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ formado uniendo (i, j) con $(i+1, j+1)$ si $x_i = 1$, y con $(i+1, j-1)$ si $x_i = -1$. En la figura 3.2 hay un ejemplo de esta representación.

De esta manera establecemos una biyección entre los elementos de B y los del conjunto C de todos los caminos de $(0, 0)$ a $(2n, 0)$ en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ que unen puntos (i, j) con $(i+1, j \pm 1)$ y que no atraviesan el eje de abscisas. Este es aún un conjunto difícil de contar. Una solución ingeniosa para hacerlo es la siguiente.

Consideremos el conjunto C_i de todos los caminos de $(0, 0)$ a $(2n, 0)$ en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ que unen puntos (i, j) con $(i+1, j \pm 1)$, prescindiendo de la condición que no atraviesen el eje de abscisas.

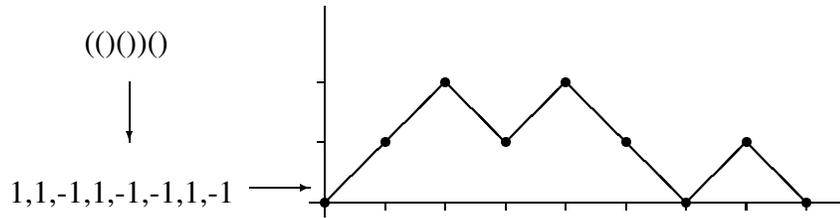


Figura 3.2: Representación geométrica de los elementos de B

Hay tantos caminos en C_t como secuencias ordenadas con n 1's y $n-1$'s (prescindiendo de que la suma de los primeros i dígitos sea no negativa), es decir,

$$|C_t| = \binom{2n}{n}$$

De estos caminos, los que no están en C son los que cortan la recta $y = -1$, es decir, contienen algún punto de la forma $(i, -1)$. Llamamos C_{-1} al conjunto de estos caminos. Entonces,

$$|C| = |C_t| - |C_{-1}|$$

Volveremos a usar una biyección para contar los caminos de C_{-1} . Consideremos la parte del camino entre $(0,0)$ y el primer punto que toca la recta $y = -1$. Si hacemos una reflexión de esta parte del camino con eje de simetría la recta $y = -1$, obtenemos un camino de $(0, -2)$ a $(2n, 0)$. En la figura 3.3 hay un ejemplo de este tipo de reflexión.

Recíprocamente, dado un camino cualquiera de $(0, -2)$ a $(2n, 0)$, la reflexión con eje de simetría la recta $y = -1$ de la parte del camino que va de $(0, -2)$ al primer punto que corta el eje $y = -1$ da un camino de C_{-1} . Esta reflexión parcial establece entonces una biyección entre los caminos de C_{-1} y el conjunto D de todos los caminos de $(0, -2)$ a $(2n, 0)$. De éstos hay tantos como permutaciones de $n+1$ 1's y $n-1$ -1's, es decir,

$$|C_{-1}| = |D| = \binom{2n}{n-1}$$

Por tanto,

$$|C| = |C_t| - |C_{-1}| = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Después de diversas transformaciones, hemos llegado finalmente a contar nuestro conjunto original. El resultado que se obtiene es el llamado n -ésimo número de *Catalan*,

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Los primeros de estos números son,

escribir un número natural n como suma de enteros no negativos, entendiendo por diferentes dos expresiones si el orden con que aparecen los sumandos es diferente. El número de *particiones ordenadas* de n en k sumandos positivos hemos visto que era $\binom{n+k-1}{k}$. El problema es mucho más complejo si lo que pretendemos es contar el número de particiones no ordenadas, o simplemente *particiones*, de un entero positivo n en k partes. Llamamos $p_k(n)$ a este número. por ejemplo, $p_2(4) = 2$, y las dos particiones de 4 en dos partes son

$$4 = 3 + 1 \quad \text{y} \quad 4 = 2 + 2$$

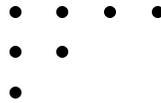
Escribiremos cada partición no ordenada de n en k partes dándolas en orden decreciente. Así, $p_k(n)$ es el número de soluciones de

$$n = x_1 + x_2 + \cdots + x_k, \quad x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_k \geq 1$$

e identificamos la partición con la k -tupla $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$. Una manera de representar cada una de las particiones es por medio de los llamados *diagramas de Ferrers*. El diagrama de Ferrers de la partición $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ se obtiene poniendo k filas de puntos, con x_i puntos en la fila i . Así, por ejemplo, la partición de 7 en tres partes

$$7 = 4 + 2 + 1$$

se representa con el diagrama



En lo que sigue veremos algunos ejemplos de resultados sobre particiones que se pueden obtener por medio de biyecciones.

La partición x' es *conjugada* de la partición x cuando su diagrama de Ferrers se obtiene del de x cambiando filas por columnas. La partición de 7 conjugada de $(4, 2, 1)$ es entonces la correspondiente al diagrama

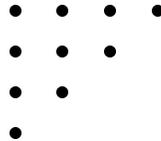


Proposición 3.18. (i) El número $p_k(n)$ de particiones de n en k partes coincide con el número de particiones de n en las cuales la parte más grande es k .

(ii) El número de particiones de n en las que la parte más grande es k o menor que k coincide con el número de particiones de n en como mucho k partes.

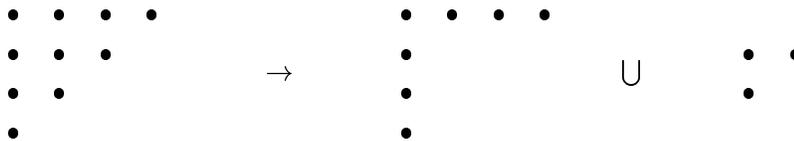
Demostración. La conjugación es una biyección entre el conjunto de particiones de n en k partes y el conjunto de particiones de n en las cuales la parte más grande es k . La segunda afirmación se demuestra de la misma manera. \square

Decimos que una partición es autoconjugada si coincide con su partición conjugada. Por ejemplo, la partición $(4, 3, 2, 1)$ de 10 es autoconjugada. El diagrama de Ferrers de una partición autoconjugada es simétrico respecto de la diagonal principal. El de la partición $(4, 3, 2, 1)$, por ejemplo, es el siguiente:



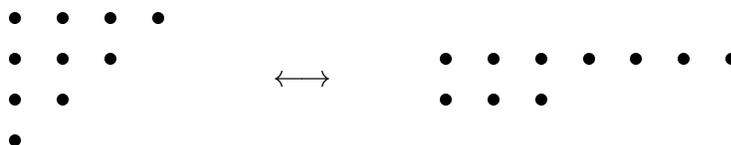
Proposición 3.19. El número de particiones de n en partes pares y diferentes coincide con el número de particiones autoconjugadas.

Demostración. Definiremos una biyección σ entre el conjunto $P_c(n)$ de particiones autoconjugadas y el conjunto $P_{sd}(n)$ de partes pares y diferentes. El diagrama de Ferrers de una partición autoconjugada se puede ver como una unión de ‘L’s invertidas:



La primera de estas ‘L’s invertidas está formada por la primera fila y la primera columna. Suprimiéndola, se obtiene la segunda ‘L’ con la primera fila y la primera columna del diagrama que queda, y así sucesivamente. Para cada partición autoconjugada x , llamamos $\sigma(x)$ a la partición que tiene por filas estas ‘L’s invertidas. Está claro que $\sigma(x) \in P_{sd}(n)$. Recíprocamente, para cada partición $x \in P_{sd}(n)$, plegando cada fila de longitud $2k + 1$ por el punto $k + 1$ construimos una sucesión de ‘L’s invertidas que corresponden a una partición de $P_c(n)$, de manera que σ es efectivamente una biyección entre los dos conjuntos. \square

En la figura siguiente se ilustra la biyección σ definida en esta última demostración para una partición de 10.



Proposición 3.20. El número de particiones de n en partes pares coincide con el número de particiones de n en partes diferentes.

Demostración. Sea $P_s(n)$ el conjunto de particiones de n en partes pares y $P_d(n)$ el conjunto de particiones de n en partes diferentes. Definiremos una biyección σ entre los dos conjuntos de la manera siguiente. Para cada partición $x \in P_d(n)$, dejamos invariantes las partes impares y convertimos cada parte par de tamaño $m_i 2^j$, donde m_i es impar, en 2^j partes de tamaño m_i . Está claro, entonces, que $\sigma(x) \in P_s(n)$ y que la aplicación es inyectiva. Para ver que es exhaustiva construimos su inversa. Para cada partición $y \in P_s(n)$, sea m_i el número de partes de tamaño i . Si $m_i \leq 1$, dejamos invariante la parte correspondiente. Si $m_i > 1$, escribimos m_i en base 2, $m_i = \sum_j a_j 2^j$, y creamos una parte de tamaño $i 2^j$ para cada j tal que $a_j = 1$. Es fácil comprobar que de esta manera hemos construido efectivamente una biyección entre $P_s(n)$ y $P_d(n)$. \square

Ejercicio 3.21. Demostrar por medio de una biyección que el número de particiones de n en exactamente tres partes coincide con el número de particiones de $2n$ en tres partes tales que la suma de dos cualesquiera de las partes es más grande que la tercera.

3.4 El principio del palomar y el teorema de Ramsey

Acabamos este capítulo desarrollando otro principio simple con resultados bien poco triviales. A diferencia de los principios de las secciones anteriores, el que veremos aquí no proporciona una herramienta de enumeración, sino que garantiza sólo la existencia de configuraciones particulares en hipótesis muy generales. La filosofía general se podría resumir diciendo que determinadas configuraciones son inevitables cuando los conjuntos son suficientemente grandes.

El *principio del palomar* se conoce también como *principio de Dirichlet* y viene a decir que, si muchas palomas se ponen en un palomar que tiene pocos agujeros, en alguno de los agujeros tiene que haber más de una paloma. Más formalmente se puede enunciar de la manera siguiente.

Principio de Dirichlet En una selección de $k + 1$ elementos, o más, de un conjunto de k elementos, algún elemento aparece dos o más veces.

De acuerdo con este principio, en una reunión de más de doce personas, al menos dos han de haber nacido en el mismo mes; o aún, en una ciudad de más de dos millones de habitantes, al menos dos personas deben tener el mismo número de cabellos (no hay casos conocidos de personas con más de 2 millones de cabellos).

Una aplicación menos evidente es la siguiente.

Proposición 3.22. En una sucesión estrictamente creciente de $2n$, $n > 1$, números enteros entre 1 y $3n$, $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{2n} \leq 3n$, debe haber dos, $a_i < a_j$, la diferencia entre los cuales sea exactamente $a_j - a_i = n - 1$.

Demostración. Consideremos la sucesión formada por la sucesión original y los elementos obtenidos sumándoles $(n - 1)$,

$$a_1, a_2, \dots, a_{2n}, a_1 + (n - 1), a_2 + (n - 1), \dots, a_{2n} + (n - 1)$$

Esta sucesión tiene $4n$ números entre 1 y $4n - 1$, de manera que, por el principio de Dirichlet, debe tener dos números iguales. Como en la colección original todos los números son diferentes, debe ser $a_j = a_i + (n - 1)$ para algunos i, j . \square

Ejercicio 3.23. Demostrar que en la proposición anterior no se puede asegurar que haya dos términos de la colección la diferencia entre los cuales sea exactamente n (comprobarlo primero para $n = 2$ y $n = 3$).

Ejercicio 3.24. Un jugador de ajedrez quiere jugar un máximo de 45 partidas en un mes (de 30 días) para no fatigarse. Para mantenerse en forma, pero, quiere jugar al menos una partida cada día. Demostrar que hay un período de como mucho 14 días consecutivos en los cuales juega exactamente 14 partidas.

Una generalización sencilla del principio de Dirichlet es la siguiente.

Proposición 3.25. En una selección de m elementos de un conjunto de tamaño $k < m$ hay algún elemento que aparece al menos $\lceil \frac{m}{k} \rceil$ veces.

Por ejemplo, en una reunión de 40 personas, al menos 4 han nacido en el mismo mes, ya que $\lceil 40/12 \rceil = 4$. Si se reparten 10 personas en dos grupos, uno de los dos tiene 5 personas o más, y si son 11, alguno de los dos grupos tiene al menos 6 personas. Si un ordenador tiene 8000 bits de memoria libre en ocho posiciones diferentes, una de las posiciones tiene al menos 1000 bits libres. O también, si la media de edad de un grupo de personas es de 20 años, alguna debe tener 20 años o más y alguna otra 20 años o menos.

Una aplicación más difícil de esta segunda versión del principio de Dirichlet es el siguiente teorema del gran matemático húngaro del siglo XX Paul Erdős.

Teorema 3.26 (Erdős–Szekeres, 1935). En una sucesión cualquiera de $n^2 + 1$ enteros diferentes, o bien hay una subsucesión estrictamente creciente de $n + 1$ elementos, o bien hay una estrictamente decreciente de $n + 1$ elementos.

Demostración. Llamamos $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$ a la sucesión original. Para cada i , llamamos c_i a la longitud de la subsucesión creciente más larga que comienza en a_i . Si alguno de los

c_i es más grande que $n + 1$, ya hemos acabado. En caso contrario, tenemos $n^2 + 1$ enteros $c_1, \dots, c_{n^2}, c_{n^2+1} = 1$ entre 1 y n , de manera que, por el principio de Dirichlet, debe haber $\left\lceil \frac{n^2+1}{n} \right\rceil = n + 1$ enteros iguales. Supongamos que $c_{i_1} = c_{i_2} = \dots = c_{i_{n+1}}$, donde $i_1 < i_2 < \dots < i_{n+1}$. Entonces los enteros correspondientes, $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{n+1}}$ forman una subsucesión decreciente. En efecto, si fuese $a_{i_k} < a_{i_{k+1}}$, entonces, usando la subsecuencia creciente más larga que comienza en $a_{i_{k+1}}$, que tiene longitud $c_{i_{k+1}}$, obtendríamos una subsecuencia creciente desde a_{i_k} de longitud $c_{i_k} = c_{i_{k+1}} + 1$, contradiciendo que estos dos números sean iguales. \square

Analizemos por ejemplo la sucesión

$$10, 3, 2, 1, 6, 5, 4, 9, 8, 7$$

Aquí $n = 3$, y las subsecuencias crecientes más largas desde cada término tienen longitudes

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_i	1	3	3	3	2	2	2	1	1	1

de manera que no hay ninguna subsecuencia de longitud 4. Hay en cambio cuatro 1 entre los c_i para $i = 1, 8, 9, 10$. Efectivamente, los términos 1, 8, 9, 10 de la sucesión forman una subsucesión decreciente.

El resultado del teorema anterior es el mejor posible en el sentido que con menos de $n^2 + 1$ enteros se pueden formar sucesiones que no satisfacen el enunciado. Por ejemplo, en la sucesión

$$3, 2, 1, 6, 5, 4, 9, 8, 7$$

de $9 = 3^2$ enteros, las subsecuencias crecientes y decrecientes más largas tienen 3 elementos.

Ejercicio 3.27. Dar ejemplos de sucesiones con 4^2 y 5^2 términos que no contengan subsecuencias crecientes ni decrecientes de longitud más grande que 4 y 5 respectivamente.

Una de las generalizaciones más complejas del principio de Dirichlet es la que formuló Ramsey en el año 1930. La riqueza de las extensiones y las aplicaciones de su resultado han dado lugar a toda una teoría, que se llama *teoría de Ramsey*. Antes de introducir el resultado general veremos una aplicación sencilla.

Proposición 3.28. En un grupo de seis personas, o bien hay tres que se conocen mutuamente, o bien hay tres que no se conocen entre ellas.

Demostración. Llamamos a a una de las personas. Por el principio de Dirichlet, de las cinco que quedan debe haber o bien tres que conocen individualmente a a , o tres que no la conocen.

Supongamos que b , c y d conocen a a . Si entre ellas hay dos que se conocen, ya hemos encontrado el trío de conocidos comunes. Si no, b , c y d forman un trío de mutuamente desconocidos.

Si en cambio hay tres personas b , c y d que no conocen a a , o bien dos de ellas no se conocen (y forman con a un trío de desconocidos), o bien se conocen mutuamente y forman un trío de conocidos comunes. \square

El enunciado general del teorema de Ramsey clasifica los subconjuntos de un cierto tamaño k de un conjunto X en dos clases disyuntas y asegura que, si $|X|$ es suficientemente grande, entonces se puede encontrar un subconjunto de un cierto tamaño de manera que todos sus k -subconjuntos sean sólo de una de las dos clases. En la proposición anterior, clasificamos todas las parejas (2-subconjuntos) en dos clases, las de parejas de conocidos y parejas de desconocidos. Entonces, o bien hay un subconjunto de 3 elementos donde todas las parejas son de conocidos, o bien uno de 3 elementos donde todas son de desconocidos.

Teorema 3.29 (Ramsey, 1930). Sea X un conjunto de N elementos y clasifiquemos todos sus subconjuntos de k elementos en dos clases disyuntas, A y B . Sean $p, q \geq k$ dos enteros. Entonces, si $N \geq R(p, q, k)$, un número que no depende de X sino sólo de p , q y k , o bien existe un subconjunto A de tamaño p que tiene todos los k -subconjuntos en la clase A , o bien existe otro B de tamaño q que tiene todos los k -subconjuntos en la clase B .

Observar que el teorema sólo asegura la existencia de un cierto número $R(p, q, k)$, que se llama *número de Ramsey*, y de los subconjuntos A o B . De hecho se conocen pocos valores de $R(p, q, k)$. La proposición 3.28 es equivalente a que $R(3, 3, 2) \leq 6$, ya que en un conjunto de seis elementos se pueden encontrar subconjuntos de 3 elementos de manera que todas las parejas que contiene sean de una clase. De hecho, ya no se puede asegurar lo mismo en un conjunto de cinco elementos. Por ejemplo, si clasificamos las parejas del conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ en las clases

$$\begin{aligned} A &= \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\} \\ B &= \{\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}\} \end{aligned}$$

todos los subconjuntos de tres elementos contienen dos parejas de una clase y una de la otra, de manera que $R(3, 3, 2) = 6$.

Demostración del teorema. Observemos en primer lugar que para $k = 1$ el teorema es cierto: Si clasificamos todos los elementos en dos clases A y B , por el principio del palomar en una de las dos hay al menos $\lceil \frac{|X|}{2} \rceil$ elementos. Por tanto, si $|X| = p + q - 1$, o bien hay un subconjunto A de p elementos con todos los elementos en la clase A , o, en caso contrario, han de quedar al

menos q elementos de la clase B . Así, $R(p, q, 1) \leq p + q - 1$ y no es difícil ver que, de hecho, vale la igualdad.

Otro caso en que resulta fácil probar el teorema y dar el valor de $R(p, q, k)$ es para $p = k$ o para $q = k$. Si $p = k$, tomamos A como uno de los conjuntos de la clase A y, si no hay ninguno, $B = X$ tiene todos los subconjuntos de la clase B , de manera que $R(k, q, k) = q$. Similarmente, $R(p, k, k) = p$.

Mostraremos ahora el caso general de la existencia de $R(p, q, k)$, $p > k$, $q > k$, por inducción. Supongamos que el teorema es cierto para $R(p, q, k - 1)$ y todos los valores de p y q . Supongamos también que es cierto para $R(p', q', k)$ si $p' < p$ o $q' < q$. En particular, llamamos $p_1 = R(p - 1, q, k)$ y $q_1 = R(p, q - 1, k)$.

Sea X un conjunto con al menos $R(p_1, q_1, k - 1)$ elementos y sea $x_0 \in X$. Consideremos $X_0 = X \setminus \{x_0\}$ y clasifiquemos todos los subconjuntos de tamaño $(k - 1)$ de X_0 en las clases A' y B' de manera que $U \subset X_0$ está en la clase A' (respectivamente, B') si y sólo si $U \cup \{x_0\} \subset X$ está en la clase A (respectivamente, B). Entonces, o bien hay un conjunto A' de tamaño p_1 con todos los subconjuntos de tamaño $k - 1$ en la clase A' , o bien hay un conjunto B' de tamaño q_1 con todos los subconjuntos de tamaño $k - 1$ en la clase B' .

En el primer caso, como $p_1 = R(p - 1, q, k)$, o bien existe un subconjunto $A \subset A'$ de tamaño $(p - 1)$ que tiene todos los subconjuntos de tamaño k en la clase A , caso en el cual $A \cup \{x_0\}$ tiene tamaño p y la misma propiedad, o bien existe un conjunto $B \subset A'$ de tamaño q que tiene todos los subconjuntos de tamaño q de la clase B , tal y como queríamos demostrar. Un razonamiento similar se aplicaría si lo que existe es un conjunto B' de tamaño q_1 . \square

Aunque se conocen muy pocos valores de los números de Ramsey $R(p, q, k)$, la demostración anterior proporciona una cota superior de estos números.

Corolario 3.30. Los números de Ramsey satisfacen la desigualdad

$$R(p, q, k) \leq R(R(p - 1, q, k), R(p, q - 1, k), k - 1) + 1$$

En particular, para $k = 2$, la desigualdad anterior se puede escribir de la manera siguiente:

Corolario 3.31. $R(p, q, 2) \leq \binom{p+q-2}{p-1}$

Demostración. Tenemos $R(p, 2, 2) = p = \binom{p}{p-1}$, de manera que el resultado es cierto para $q = 2$. Similarmente, $R(2, q, 2) = \binom{q}{1}$. Supongamos que el resultado es cierto para $R(p', q', 2)$ si $p' < p$ o bien $q' < q$. Usando la desigualdad del corolario anterior y el hecho de que $R(p, q, 1) =$

$p + q - 1$,

$$\begin{aligned}
 R(p, q, 2) &\leq R(R(p-1, q, 2), R(p, q-1, 2), 1) + 1 \\
 &= R(p-1, q, 2) + R(p, q-1, 2) \\
 &\leq \binom{p+q-3}{p-2} + \binom{p+q-3}{p-1} \\
 &= \binom{p+q-2}{p-1}
 \end{aligned}$$

□

Notas bibliográficas

El desarrollo y la sistematización de los principios que se han visto en este capítulo se han producido básicamente durante el siglo XX, a medida que los métodos de enumeración y la combinatoria en general han ido formando un cuerpo teórico con identidad propia. El principio de inclusión-exclusión, formulado en su versión moderna por Da Silva (1854) y Sylvester (1883), forma parte de los llamados *métodos de criba* (*sieve methods*) utilizados en teoría de números. Sylvester fue también quien introdujo los diagramas de Ferrers para el estudio de particiones. A pesar de su nombre, E. Catalan (1814–1894) fue un matemático belga que estudió la formación correcta de paréntesis. El principio de reflexión que se ha usado para obtener los números de Catalan fue introducido por el matemático francés D. André a comienzos del siglo XX. El Teorema de Ramsey ha sido la fuente de toda una rama de la combinatoria, llamada justamente Teoría de Ramsey, que gira alrededor de la idea de que un conjunto llega a contener subconjuntos con propiedades preestablecidas siempre que se tome un número suficiente de elementos.

Los temas que aparecen en este capítulo se pueden encontrar en la mayoría de textos de combinatoria o matemática discreta. Los libros de Biggs [1] y de Hall [2] son ejemplos excelentes. El texto de Stanton y White [3] pone énfasis en el aspecto constructivo y algorítmico de estos problemas.

Bibliografía

- [1] N. L. Biggs. *Matemática Discreta*, Ed. Vicens Vives, 1994.
- [2] M. Hall. *Combinatorial Theory*, Wiley Interscience, 1986.
- [3] D. Stanton, D. White. *Constructive Combinatorics*, UTM, Springer Verlag, 1986.

Problemas

1. ¿Cuántos números hay entre 1000 y 10000 que no sean divisibles por 3 ni por 7?
2. ¿Cuál es el número entero más pequeño que no tiene más de cuatro divisores primos?
3. Demostrar que el número de enteros $n \leq N$ que no son divisibles por los primos del conjunto $P = \{2, 3, 5, 7\}$ es

$$N - \sum_{i \in P} \lfloor N/i \rfloor + \sum_{i, j \in P} \lfloor N/ij \rfloor - \sum_{i, j, k \in P} \lfloor N/ijk \rfloor + \lfloor N/210 \rfloor$$

Calcular este número si $N = 210k$.

4. Demostrar que el número de matrices cuadradas (a_{ij}) de tamaño 3×3 y coeficientes a_{ij} enteros no negativos tales que la suma de los coeficientes de cada fila y la suma de los coeficientes de cada columna vale $r \in \mathbb{N}$ es

$$\binom{r+2}{2}^2 - 3 \binom{r+3}{4}$$

5. Demostrar que el número $e(n \rightarrow m)$ de aplicaciones exhaustivas de un conjunto X de n elementos en un conjunto Y de m elementos viene dado por la expresión

$$e(n \rightarrow m) = m^n - \binom{m}{1}(m-1)^n + \binom{m}{2}(m-2)^n - \dots + (-1)^{m-1}m$$

6. Demostrar que el número de palabras de longitud $2n$ que se pueden formar de un alfabeto de n letras sin que dos letras seguidas sean iguales es

$$\frac{1}{2^n} \left((2n!) - \binom{n}{1} 2(2n-1)! + \binom{n}{2} 2^2(2n-2)! - \dots - (-1)^n 2^n n! \right)$$

7. Usando el principio de inclusión-exclusión, contar cuántas combinaciones con repetición de tamaño 11 se pueden formar con 3 elementos x_1, x_2, x_3 si x_1 no puede aparecer más de $r_1 = 3$ veces, x_2 no puede aparecer más de $r_2 = 4$ veces y x_3 no puede aparecer más de $r_3 = 6$ veces (llamamos A_i al conjunto de combinaciones con más de r_i elementos x_i , $i = 1, 2, 3$).
8. Un ordenador efectúa el producto de n números por parejas usando la propiedad asociativa (por ejemplo, $x_1 x_2 x_3 x_4$ se puede multiplicar haciendo primero $x_1 x_2$, el resultado por x_3 y el resultado por x_4 , es decir, $((x_1 x_2) x_3) x_4$). Si no se puede alterar el orden de los elementos, ¿de cuántas maneras diferentes se puede efectuar el producto de n números?

9. Demostrar, a partir de una biyección, la identidad

$$\binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m}$$

10. Si $X = \{1, 2, \dots, n\}$, una función $f : X \rightarrow X$ es *monótona* si $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. Demostrar que el número de aplicaciones monótonas que verifican $f(i) \leq i$, $i \in X$ es el número de Catalan C_n .
11. Usando una biyección con las secuencias de longitud $(m+n)$ de ceros y unos con m ceros, demostrar que el número de diagramas de Ferrers que caben en un rectángulo $m \times n$ es $\binom{m+n}{n}$.
12. Demostrar que hay tantas particiones autoconjugadas de n como particiones con una parte de tamaño k^2 y el resto de tamaño $\leq 2k$ para algún k .
13. Tenemos una caja con i bolas de color c_i para $i = 1, \dots, n$. Demostrar que, dado $k < n$, el mínimo número de bolas que es preciso extraer para tener la seguridad que habrá k del mismo color es $(k-1)(n - (k/2) + 1) + 1$.
14. Demostrar que en cualquier subconjunto Y de tamaño n de $X = \{1, 2, \dots, 2n\}$ hay un par de elementos $a, b \in Y$ tales que a divide a b .
15. Dada cualquier sucesión a_1, \dots, a_p de p números naturales, ¿hay alguna subsecuencia de términos consecutivos $a_i, a_{i+1}, \dots, a_{i+k}$ tal que p divide a la suma $a_i + a_{i+1} + \dots + a_{i+k}$?
16. Demostrar que, para cualquier partición de los pares de elementos de un conjunto X de cardinal 17 en tres clases A, B, C , o bien hay tres pares de la clase A , o bien tres de la clase B o bien tres de la clase C .

Capítulo 4

Funciones generadoras

1. Ecuaciones de recurrencia
2. Funciones generadoras
3. Ecuaciones de recurrencia lineales
4. Números combinatorios

En este capítulo se tratan técnicas de resolución de problemas de enumeración en los cuales se obtienen expresiones del resultado en términos del tamaño del problema. Cuando estas expresiones relacionan la solución del problema en tamaños diferentes, se obtienen las llamadas *ecuaciones de recurrencia*, que se exponen en la primera sección y donde se obtienen también ecuaciones de recurrencia para muchos de los problemas considerados en los dos capítulos anteriores. En particular se introduce la famosa sucesión de Fibonacci, que es un ejemplo muy representativo. Las *funciones generadoras*, que se introducen en la sección 2, constituyen una de las herramientas más versátiles para el tratamiento de problemas de enumeración. En esta sección se ven algunas de las manipulaciones más comunes de las funciones generadoras ordinarias, se expone un ejemplo de aplicación en relación a los coeficientes binomiales y se introducen también las funciones generadoras exponenciales. Aunque no es estrictamente necesario, el conocimiento de los desarrollos en serie de potencias de funciones de variable real o compleja puede hacer más fácil y rica la lectura de esta parte. En la sección 3 se usan funciones generadoras para obtener un procedimiento sistemático de resolución de las llamadas ecuaciones de recurrencia *lineales*. La resolución hace intervenir la descomposición de fracciones racionales en fracciones simples. En esta cuestión, también el conocimiento de este tipo de descomposición (que se usa también para el cálculo de primitivas de funciones racionales) hará más ágil la lectura de algunos fragmentos. Finalmente, en la última sección se hace una revisión de los números combinatorios bajo la óptica de las funciones generadoras. Aparte de los

coeficientes binomiales, discutidos en la sección 2, se revisan los desarreglos, los números de Catalan y las particiones. Por otra parte, se completa la descripción de números combinatorios con los llamados *números de Stirling* y *números de Bell*.

4.1 Ecuaciones de recurrencia

El enunciado de un problema combinatorio de enumeración hace intervenir uno o más números naturales que dan las dimensiones del problema. Por ejemplo, en la enumeración de los subconjuntos de tamaño k de un conjunto de tamaño n , las dimensiones del problema son n y k . A menudo es fácil, si no trivial, resolver los problemas en dimensiones pequeñas. También es frecuente que la solución se pueda expresar en términos del mismo problema en dimensiones más pequeñas. Las expresiones que dan estas relaciones son lo que se llama *ecuaciones de recurrencia*.

Comencemos con un problema conocido, el de contar el número de subconjuntos de tamaño k del conjunto $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Este número no depende de los elementos del conjunto X , sino sólo de su tamaño n y del tamaño k de los subconjuntos que queremos extraer. Llamamos a este número, provisionalmente, por $C(n, k)$. Es fácil contar cuántos subconjuntos hay de tamaño 1, $C(n, 1) = n$. También es fácil ver que $C(n, n) = 1$. En cuanto a la solución general, de todos los subconjuntos de tamaño k que podemos formar en el conjunto X , los hay que contienen el elemento x_1 y los hay que no. Los que contienen el elemento x_1 son los que se pueden formar añadiendo $k - 1$ elementos de los $n - 1$ elementos de X diferentes de x_1 . Este es, sin embargo, el mismo problema: ¿cuántos subconjuntos de tamaño $k - 1$ se pueden formar de un conjunto de $n - 1$ elementos? De acuerdo con nuestra notación, este número es $C(n - 1, k - 1)$. De forma similar, los subconjuntos que no contienen x_1 son los de tamaño k que se pueden formar con los $n - 1$ elementos de X diferentes de x_1 . Así obtenemos la relación

$$C(n, k) = C(n - 1, k) + C(n - 1, k - 1) \quad (4.1)$$

Una *ecuación de recurrencia* para una sucesión de números $f(n_1, n_2, \dots, n_k)$, donde n_1, \dots, n_k son las variables de la ecuación (usualmente enteros positivos) es una expresión que da el valor de $f(n_1, n_2, \dots, n_k)$ en términos de $f(n'_1, n'_2, \dots, n'_k)$ para valores $n'_i \leq n_i$ más pequeños de las variables. Una ecuación de recurrencia determina los valores de la sucesión si se establece (i) el dominio de validez de la ecuación en términos de las variables y (ii) un conjunto suficiente de valores particulares de la sucesión.

En el ejemplo anterior, la relación 4.1 es una ecuación de recurrencia de dos variables, válida para enteros positivos n, k con $k < n$, que determina los valores de la sucesión $C(n, k)$ si se especifican por ejemplo los valores $C(n, 1)$ y $C(n, n)$, ya que la aplicación reiterada de la recurrencia 4.1 conduce a números de estos dos tipos.

Las ecuaciones de recurrencia son muy útiles cuando se quiere resolver un problema particular (para ciertos valores concretos de n y de k en el ejemplo anterior), ya que el cálculo se puede mecanizar con mucha facilidad. En otras palabras, una ecuación de recurrencia es ya un algoritmo recursivo para hacer cálculos. Lo único que se necesita es un punto de partida para poner en marcha el proceso. En el nuestro ejemplo, podríamos calcular $C(4, 3)$ sabiendo que $C(n, 1) = n$, $C(n, n) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, haciendo

$$C(4, 3) = C(3, 3) + C(3, 2) = 1 + (C(2, 2) + C(2, 1)) = 1 + (2 + 1) = 4$$

En cambio, las ecuaciones de recurrencia tienen el inconveniente que no dan ninguna información sobre el valor de las soluciones si no se calculan explícitamente. Por esto resulta interesante intentar encontrar técnicas que permitan reducir una ecuación de recurrencia a lo que se llama una *solución cerrada*, que quiere decir una expresión que pueda ser evaluada en una cantidad fija de operaciones aritméticas (sumas y diferencias, productos y cocientes, exponenciación y radicación). En problemas combinatorios se admite también como expresión cerrada el factorial de un número (aunque de hecho corresponde a una cantidad variable de multiplicaciones) y a menudo también expresiones con sumatorios. Así, por ejemplo, la solución que hemos obtenido en el capítulo 2

$$C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

se admite como una expresión cerrada, mientras que la relación 4.1 ciertamente no lo es.

En esta sección veremos como muchos de los problemas de los dos capítulos anteriores admiten también un tratamiento en términos de ecuaciones de recurrencia. En secciones posteriores se analizarán técnicas específicas para resolver algunas de estas recurrencias.

Los *coeficientes binomiales* satisfacen un número considerable de ecuaciones de recurrencia de las cuales se han visto ejemplos en la última sección del capítulo 2. La más característica es la ecuación 4.1, que hemos discutido más arriba y que proporciona la base para construir el triángulo de Tartaglia.

Recordemos que un *desarreglo* de n símbolos es una permutación que no deja ningún símbolo en su sitio. El número D_n de desarreglos de n símbolos se puede obtener también por una ecuación de recurrencia. Consideremos el conjunto A_i de los desarreglos de $1, 2, \dots, n$ en los cuales 1 ocupa la posición $i \neq 1$. Sea A_i^1 el conjunto de estos desarreglos en que i ocupa la posición 1, y $A_i^0 = A_i \setminus A_i^1$ el resto. Para $n = 5$ y $i = 2$ tendremos, por ejemplo,

A_2^1	A_2^0		
21453	31254	41253	51234
21534	31524	41523	51423
	31452	41532	51432

Si se intercambian los símbolos 1 e i en la identidad, para completar un desarreglo es preciso mover de su sitio los $(n-2)$ símbolos que quedan y distribuirlos en las $(n-2)$ posiciones libres. Por tanto, hay tantos elementos en A_i^1 como desarreglos de los $(n-2)$ símbolos diferentes de 1 y de i , $|A_i^1| = D_{n-2}$. Por otra parte, si i no ocupa la posición 1, llamando '1' al símbolo i establecemos una biyección entre A_i^0 y los desarreglos de $(n-1)$ símbolos (tenemos los símbolos $1 \dots n$ sin el símbolo i y las posiciones $1 \dots n$ sin la posición i). Así, $|A_i^0| = D_{n-1}$. Entonces, $|A_i| = |A_i^1| + |A_i^0| = D_{n-2} + D_{n-1}$ para cualquier i . De

$$D_n = |A_2 \cup \dots \cup A_n|$$

donde la unión es disyunta, obtenemos la ecuación de recurrencia

$$D_n = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1}) \quad (4.2)$$

válida para todos los enteros positivos $n > 2$, y que determina los valores de D_n a partir de $D_1 = 0$ y $D_2 = 1$. A partir de estos valores, se obtiene la sucesión

$$0, 1, 2, 9, 44, 265, \dots$$

Ejercicio 4.1. Encontrar una ecuación de recurrencia para el número D_n^k de permutaciones de $1 \dots n$ que dejan exactamente k símbolos en su sitio. Usarla para obtener los 5 primeros valores de D_5^2 .

Los números de Catalan satisfacen también una ecuación de recurrencia característica. Recordemos que los números de Catalan C_n cuentan, entre otras cosas, el número de secuencias de $2n$ paréntesis sintácticamente correctos (es decir, sin que se cierre un paréntesis que no ha sido abierto antes). Dada una de estas secuencias, llamamos k al entero más pequeño tal que la subsucesión de los primeros $2k$ paréntesis también es sintácticamente correcta. Por ejemplo, en las 5 sucesiones correctas de 6 paréntesis,

$$((())), (()), (())(), ()(), ()()$$

los valores de k son 3, 3, 2, 1 y 1 respectivamente. Todas las secuencias que tienen un valor fijado de k se obtienen concatenando una secuencia correcta de longitud $k-1$ cerrada entre paréntesis con una secuencia correcta de longitud $(n-k)$, de manera que el número de secuencias con este valor es $C_{k-1}C_{n-k}$. Así pues, tenemos la ecuación de recurrencia

$$C_n = \sum_{k=1}^n C_{k-1}C_{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} C_kC_{n-k-1} \quad (4.3)$$

válida para enteros positivos $n > 2$ si definimos $C_0 = 1$. A partir de los valores obvios $C_1 = 1$ y $C_2 = 2$, se obtiene la secuencia

$$1, 2, 5, 14, 42, 132, \dots$$

Ejercicio 4.2. Demostrar la ecuación 4.3 usando la expresión $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ y las propiedades de los coeficientes binomiales.

Las *particiones* de un entero n en $k \leq n$ partes, $p_k(n)$, se pueden obtener también por medio de una recurrencia. Para cada partición

$$n = x_1 + x_2 + \cdots + x_k, \quad x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_k \geq 1$$

tenemos una expresión del tipo

$$n - k = y_1 + y_2 + \cdots + y_k, \quad y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_k \geq 0$$

restando 1 a cada x_i . Si algunos de los valores y_j valen cero, tenemos en realidad una partición de $(n - k)$ en menos de k partes, de manera que obtenemos la ecuación de recurrencia

$$p_k(n) = p_k(n - k) + p_{k-1}(n - k) + \cdots + p_2(n - k) + p_1(n - k) \quad (4.4)$$

válida para enteros positivos $n \geq k > 1$. Para $k = 2$, por ejemplo, los valores de $p_1(n) = 1$ y $p_2(2) = p_2(3) = 1$ determinan la sucesión $p_2(n)$, $n \geq 2$

$$1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, \dots$$

Acabaremos esta sección con una de las ecuaciones de recurrencia más célebres: la que da lugar a la llamada *sucesión de Fibonacci*. Uno de los problemas que lleva a esta sucesión es el de determinar el número de secuencias de longitud n con los símbolos 0, 1 de manera que no haya dos ceros seguidos. Llamamos S_n al conjunto de estas sucesiones y $s_n = |S_n|$. Por ejemplo, las sucesiones de longitud 3 de ceros y unos sin dos ceros seguidos son

$$111 \quad 110 \quad 101 \quad 011 \quad 010$$

de manera que $s_3 = 5$. Obtendremos ahora una ecuación de recurrencia para s_n . Hay tantas sucesiones de S_n que acaban en 1 como s_{n-1} . En cambio, si acaban en cero, el penúltimo dígito debe ser 1, de manera que el número de sucesiones de longitud n sin dos ceros consecutivos y acabadas en cero es s_{n-2} . Tenemos por tanto la ecuación de recurrencia

$$s_n = s_{n-1} + s_{n-2} \quad (4.5)$$

válida para cualquier entero positivo $n > 2$. A partir de los valores $s_1 = 2$ y $s_2 = 3$ obtenemos la sucesión

$$2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

La ecuación de recurrencia 4.5 es la que define los *números de Fibonacci* salvo que los valores iniciales son diferentes que los de la sucesión s_n . Si llamamos F_n al número n -ésimo de Fibonacci, tenemos

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad (4.6)$$

de manera que $s_n = F_{n-2}$ para $n \geq 2$ (también es común la asignación de valores iniciales $F_0 = F_1 = 1$, con lo cual $s_n = F_{n-1}$). La popularidad de la sucesión de Fibonacci reside tanto en la frecuencia con que aparece en problemas combinatorios y su amplia aplicabilidad como en la simplicidad de la ecuación de recurrencia que la define. En la sección 3 se tratará la resolución de una clase general de ecuaciones de recurrencia y, en particular, obtendremos una expresión cerrada de estos números.

Ejercicio 4.3. Supongamos que en una población de conejos en cada período hay tantos machos como hembras y se aparean para tener dos conejos, un macho y una hembra. Los recién nacidos se incorporan al ciclo reproductor dos períodos después de haber nacido. Encontrar una ecuación de recurrencia para la sucesión u_n que da el número de individuos en el período n . Dar los primeros cinco términos de la sucesión si inicialmente hay una única pareja de recién nacidos.

4.2 Funciones generadoras

De acuerdo con lo que se exponía en la sección anterior, muchas veces un problema combinatorio se puede interpretar como la determinación de una secuencia u_n de números, cada uno de los cuales es la solución del problema de tamaño n . El concepto de función generadora permite trabajar con la secuencia entera ‘almacenándola’ en una función. En esta sección veremos de qué manera se hace esto y qué ventajas supone para la resolución de los problemas de enumeración.

Dada una secuencia de números u_n , $n \geq 0$, se llama *función generadora ordinaria* de esta secuencia la expresión

$$U(x) = u_0 + u_1x + u_2x^2 + \cdots = \sum_{n \geq 0} u_n x^n$$

La expresión anterior es lo que se llama una *serie formal* y la sucesión $\{u_0, u_1, \dots\}$ es su *sucesión de coeficientes*. Las series formales son una extensión de los polinomios. De hecho, los polinomios son las series formales con sólo un número finito de elementos no nulos¹.

¹En el capítulo 12 hay una sección dedicada a tratar el anillo de polinomios, una lectura de la cual puede ayudar a familiarizarse en algunas de las cuestiones que trataremos aquí.

Como en éstas, se pueden definir las operaciones algebraicas de suma y producto así como también la operación de derivación. En primer lugar, diremos que dos series formales son iguales si tienen la misma sucesión de coeficientes. Dadas dos expresiones $U(x) = \sum_{n \geq 0} u_n x^n$ y $V(x) = \sum_{n \geq 0} v_n x^n$, definimos su suma como la expresión

$$U(x) + V(x) = \sum_{n \geq 0} (u_n + v_n) x^n \quad (4.7)$$

y su producto como

$$U(x)V(x) = \sum_{n \geq 0} c_n x^n \quad (4.8)$$

donde

$$c_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0$$

(recordar la suma y el producto de polinomios).

Diremos que $U(x)$ es la inversa respecto del producto de $V(x)$ si el producto de las dos series es $1 = 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \cdots$, y escribimos

$$U(x) = \frac{1}{V(x)}$$

Por ejemplo, la inversa respecto del producto de

$$V(x) = 1 + x + x^2 + \cdots$$

(la serie asociada a la sucesión que tiene todos los términos iguales a 1) es la serie $U(x) = 1 - x$, ya que, de acuerdo con la ley del producto que hemos definido,

$$(1 - x)(1 + x + x^2 + \cdots) = 1$$

y escribimos

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1 - x} \quad (4.9)$$

Esta última igualdad no se debe entender como una igualdad de funciones. Si sustituimos x por $1/2$, el valor numérico de los dos lados de la igualdad es el mismo. En cambio, si sustituimos x por 2 , a la izquierda de la igualdad obtenemos una serie numérica divergente y a la derecha obtenemos -1 . Este hecho, sin embargo, no nos impide considerar la igualdad 4.9 como una igualdad válida en el conjunto de las series formales. Desde este punto de vista, tenemos el resultado siguiente:

Proposición 4.4. Una serie formal $U(x) = \sum_{n \geq 0} u_n x^n$ es invertible si y sólo si $u_0 \neq 0$.

Demostración. La serie $U(x)$ es invertible si existe una serie $V(x) = \sum_{k \geq 0} v_k x^k$ de manera que $W(x) = U(x)V(x) = 1$. De acuerdo con la definición del producto de series, los coeficientes de $W(x)$ satisfacen las relaciones,

$$w_0 = u_0 v_0 = 1$$

de donde tiene que ser $v_0 = 1/u_0$ (que está bien definido si $u_0 \neq 0$)

$$w_1 = u_1 v_0 + u_0 v_1 = 0$$

de donde tiene que ser $v_1 = u_1 v_0 / u_0$, y, en general,

$$w_h = u_h v_0 + u_{h-1} v_1 + \cdots + u_1 v_{h-1} + u_0 v_h$$

que proporciona recurrentemente el coeficiente v_h en términos de los coeficientes de $U(x)$ y los coeficientes v_{h-1}, \dots, v_0 encontrados anteriormente. Así entonces, este procedimiento permite identificar los coeficientes de una serie $V(x)$ inversa de $U(x)$. \square

Otra de las operaciones útiles en el conjunto de las series formales es la de *derivación*. La derivada de la serie $U(x) = \sum_{n \geq 0} u_n x^n$ se define como

$$U'(x) = \sum_{n \geq 1} n u_n x^{n-1}$$

Una de las ventajas de concentrar la secuencia $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en una expresión global $U(x) = \sum_{n \geq 0} u_n x^n$ es justamente la posibilidad de efectuar el tipo de manipulaciones algebraicas que hemos descrito hasta aquí. Muchas veces, el uso de estas manipulaciones proporciona expresiones explícitas de los términos u_n de la secuencia. En lo que sigue veremos una primera ilustración de la versatilidad de las funciones generadoras revisando los coeficientes binomiales y algunos problemas combinatorios asociados a estos números en la perspectiva de las funciones generadoras.

Recordemos cómo obteníamos la fórmula del binomio en la sección 3 del capítulo 2 por medio de un argumento combinatorio. Al desarrollar el producto

$$\underbrace{(1+x) \cdots (1+x)}_n$$

el coeficiente de x^k cuenta el número de maneras de escoger x en k de los paréntesis y 1 en los $n - k$ restantes. En otras palabras, el coeficiente de x^k es el número de combinaciones de n

elementos tomados de k en k , $\binom{n}{k}$. Para n fijo, tenemos entonces que la función generadora de la secuencia $u_k = \binom{n}{k}$ (recordemos que $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$) es

$$U_n(x) = (1+x)^n = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} x^k \quad (4.10)$$

En este caso la función generadora tiene sólo un número finito de sumandos, de manera que se puede interpretar también como una función de x . De aquí se obtienen, por ejemplo, las relaciones

$$U_n(1) = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} = 2^n$$

que da el número total de subconjuntos de un conjunto de n elementos, o

$$U_n(-1) = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} (-1)^k = 0$$

Derivando la ecuación 4.10, obtenemos

$$U_n'(x) = \sum_{k \geq 1} \binom{n}{k} k x^{k-1}$$

que coincide con la derivada usual de $(1+x)^n$, $U_n'(x) = n(1+x)^{n-1}$, de donde se obtiene

$$U_n'(1) = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$$

A partir de la igualdad $U_{2n} = (1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n = (U_n(x))^2$, igualando los coeficientes del mismo grado en los dos lados de la igualdad y usando la identidad $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, se obtiene la relación

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2$$

Estos son algunos ejemplos de cómo el uso de funciones generadoras proporciona resultados de otro modo difíciles de obtener y de demostrar.

Consideremos ahora el producto

$$\underbrace{(1+x+x^2) \cdots (1+x+x^2)}_n$$

El coeficiente de x^k cuenta el número de maneras de escoger 1, x o x^2 en cada uno de los paréntesis de manera que la suma total de exponentes sea k . Si identificamos cada paréntesis

con un símbolo, la potencia cero se puede asociar al hecho que no se escoge el símbolo, la potencia 1 al hecho que se escoge una vez y la potencia 2 al hecho que se escoge dos veces. Así, el coeficiente de x^k cuenta el número de combinaciones de n símbolos tomados de k en k de manera que cada símbolo puede aparecer hasta dos veces. Por ejemplo, las combinaciones de 4 elementos tomados de 3 en 3 admitiendo hasta dos apariciones de cada elemento son

123 134 124 234
112 113 114
221 223 224
331 332 334
441 442 443

y hay tantas como el coeficiente de x^3 en

$$(1 + x + x^2)^4 = 1 + 4x + 10x^2 + 16x^3 + \dots$$

La función generadora de este tipo de combinaciones es entonces

$$U_n(x) = (1 + x + x^2)^n \quad (4.11)$$

Ejercicio 4.5. Sea u_k el número de combinaciones de n elementos tomados de k en k en las cuales el elemento i puede aparecer hasta r_i veces. Encontrar la función generadora de la sucesión u_k . Usando esta función generadora, calcular el número de combinaciones de 4 elementos tomados de 3 en 3 de manera que el elemento x_1 puede aparecer una vez, el elemento 2 puede aparecer dos veces y los elementos 3 y 4 pueden aparecer tres veces.

Llevando al límite la generalización que se propone en el ejercicio anterior, se puede obtener el número de combinaciones con repetición de n elementos tomados de k en k : si no hay limitaciones en el número de veces que puede aparecer un elemento, la función generadora es

$$U(x) = (1 + x + x^2 + \dots)^n$$

La expresión $V(x) = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{k \geq 0} x^k$ es la función generadora de la secuencia $v_k = 1, k \geq 0$. Recordemos que en la ecuación 4.9, habíamos obtenido una expresión más compacta de esta función como $V(x) = 1/(1-x)$. Así entonces, la función generadora del número de combinaciones con repetición de n elementos tomados de k en $k, u_k = \binom{n+k-1}{k}$, es

$$U(x) = \frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k \geq 0} \binom{n+k-1}{k} x^k \quad (4.12)$$

El conocimiento de esta función generadora es útil para tratar y resolver problemas similares. Por ejemplo, el número de combinaciones con repetición de n elementos tomados de k

en k de manera que cada elemento aparece un número *par* de veces es, siguiendo los mismos argumentos,

$$W(x) = (1 + x^2 + x^4 + \dots)^n = \frac{1}{(1 - x^2)^n} \quad (4.13)$$

Ejercicio 4.6. Determinar la función generadora de las combinaciones con repetición de n elementos tomados de k en k , $k > 0$, en los cuales cada elemento aparece un número impar de veces. Usar esta función generadora para determinar el número de combinaciones de 4 elementos tomados de 3 en 3 en las cuales cada elemento aparece un número impar de veces.

Acabamos esta sección viendo brevemente otra clase de funciones generadoras. Además de la función generadora *ordinaria* de una sucesión $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, se consideran habitualmente otros tipos de funciones generadoras. Particularmente interesantes son las funciones generadoras exponenciales. La *función generadora exponencial* de la sucesión $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es

$$E(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{n!} x^n$$

La diferencia con las funciones generadoras ordinarias es entonces que los coeficientes se dividen por $n!$. Por ejemplo, del análisis elemental sabemos que la función generadora de la sucesión $(1, 1, 1, \dots)$ es la función exponencial,

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} x^n = e^x$$

La ventaja de esta modificación respecto de las funciones generadoras ordinarias consiste sobre todo en la propiedad siguiente:

Proposición 4.7. Si $E(x)$ y $G(x)$ son las funciones generadoras exponenciales de las secuencias $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ respectivamente, entonces $E(x)G(x)$ es la función generadora de la secuencia $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con

$$s_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k v_{n-k}$$

Demostración. Se trata simplemente de efectuar el producto

$$E(x)G(x) = \left(\sum_{k \geq 0} \frac{u_k}{k!} x^k \right) \left(\sum_{r \geq 0} \frac{v_r}{r!} x^r \right) = \sum_{k,r \geq 0} \frac{u_k v_r}{k! r!} x^{k+r}$$

Al reunir todos los coeficientes de una misma potencia n obtenemos el coeficiente

$$\sum_{k+r=n} \frac{u_k v_r}{k! r!}$$

de manera que el coeficiente n -ésimo de la función generadora exponencial $E(x)G(x)$ es

$$n! \sum_{k+r=n} \frac{u_k v_r}{k! r!} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k v_{n-k}$$

□

Recordemos que, si $U(x)$ y $V(x)$ son las funciones generadoras ordinarias de las sucesiones $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ respectivamente, entonces $U(x)V(x)$ es la función generadora ordinaria de la sucesión $\{c_k = \sum_{n=0}^k u_n v_{k-n}\}_{k \in \mathbb{N}}$. El uso de funciones generadoras exponenciales proporciona una herramienta alternativa para describir combinaciones de sucesiones en términos de funciones generadoras. En la última sección de este capítulo se verán algunas situaciones en que el uso de las funciones generadoras exponenciales resulta más adecuado que el de funciones generadoras ordinarias.

4.3 Ecuaciones de recurrencia lineales

Una de las aplicaciones de las funciones generadoras es la de resolución de ecuaciones de recurrencia. La idea básica de esta aplicación está en el hecho que la traslación de índice en una función generadora se traduce simplemente en una expresión algebraica: el producto por una potencia de x . Por ejemplo, las series $U(x) = \sum_{n \geq 0} u_n x^n$ y $V_1(x) = \sum_{n \geq 1} u_{n-1} x^n$, que corresponden a las secuencias (u_0, u_1, u_2, \dots) y $(0, u_0, u_1, \dots)$ respectivamente, están relacionadas por la igualdad,

$$V_1(x) = xU(x)$$

De manera similar, la serie que resulta de $U(x)$ desplazando los índices h posiciones hacia adelante es

$$V_h(x) = \sum_{n \geq h} u_{n-h} x^n = x^h U(x) \quad (4.14)$$

que corresponde a la sucesión de coeficientes $(\underbrace{0, \dots, 0}_h, u_0, u_1, \dots)$.

Este hecho permite en general analizar las ecuaciones de recurrencia mediante funciones generadoras. En esta sección se usará para obtener un procedimiento sistemático de resolución de una clase amplia de ecuaciones de recurrencia: las ecuaciones de recurrencia lineales.

La secuencia u_n satisface una ecuación de recurrencia *lineal homogénea* de orden k si

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \dots + a_k u_{n-k}, \quad n \geq k \quad (4.15)$$

para ciertas constantes a_1, \dots, a_k . Los términos de la secuencia quedan determinados por la ecuación y un conjunto de k valores (usualmente se dan los valores de u_0, u_1, \dots, u_{k-1}). Por ejemplo, la ecuación 4.6 de la sección anterior que da los números de Fibonacci,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n \geq 0, \quad F_0 = F_1 = 1$$

es una ecuación lineal de orden 2.

Sea $U(x) = \sum_{n \geq 0} u_n x^n$ la función generadora de una sucesión que satisface una ecuación de recurrencia lineal de orden k como 4.15.

Multiplicamos los dos lados de esta ecuación por x^n y sumamos para todos los valores de $n \geq k$ para obtener

$$\sum_{n \geq k} u_n x^n = a_1 \sum_{n \geq k} u_{n-1} x^n + \dots + a_k \sum_{n \geq k} u_{n-k} x^n \quad (4.16)$$

Para expresar esta igualdad en términos de $U(x) = \sum_{n \geq 0} u_n x^n$, llamamos $U_h(x)$ al polinomio de los primeros h coeficientes,

$$U_h(x) = u_0 + u_1 x + \dots + u_{h-1} x^{h-1}, \quad h \geq 1$$

Entonces,

$$\sum_{n \geq k} u_n x^n = U(x) - U_k(x), \quad \sum_{n \geq k} u_{n-1} x^n = x(U(x) - U_{k-1}(x)), \quad \dots, \quad \sum_{n \geq k} u_{n-k} x^n = x^k U(x)$$

Substituyendo estas expresiones en la ecuación 4.16, obtenemos

$$U(x)(1 - a_1 x - \dots - a_k x^k) = U_k(x) - a_1 x U_{k-1}(x) - \dots - a_{k-1} x^{k-1} U_1(x) \quad (4.17)$$

A la derecha de la igualdad hay una suma de polinomios de grado como mucho $k-1$ que denotaremos por $C(x)$. Observemos que los coeficientes de $C(x)$ se pueden obtener de los valores de u_0, u_1, \dots, u_{k-1} . De esta manera tenemos la primera parte de la resolución de ecuaciones de recurrencia lineales.

Proposición 4.8. Si $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ satisface una ecuación de recurrencia lineal de orden k

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \dots + a_k u_{n-k} \quad n \geq k$$

entonces la función generadora $U(x) = \sum_{n \geq 0} u_n x^n$ es

$$U(x) = \frac{C(x)}{1 - a_1 x - \dots - a_k x^k}$$

para un cierto polinomio $C(x)$ de grado como mucho $k-1$, los coeficientes del cual quedan determinados por los valores de u_0, u_1, \dots, u_{k-1} .

Esta proposición proporciona una expresión cerrada de la función generadora. Más adelante veremos cómo obtener los coeficientes u_n a partir de esta expresión, con lo que se completa la resolución de la ecuación de recurrencia inicial. Antes, sin embargo, veamos cómo se aplica para encontrar la función generadora de la sucesión $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de los números de Fibonacci. Recordemos que estos números satisfacen la ecuación

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2, \quad F_0 = 0, \quad F_1 = 1$$

De acuerdo con la proposición anterior, la función generadora $F(x) = \sum_{n \geq 0} F_n x^n$ es

$$F(x) = \frac{C(x)}{1 - x - x^2}$$

donde $C(x)$ es un polinomio de grado como mucho 1, es decir, $C(x) = c_0 + c_1 x$. Para determinar estos coeficientes, escribimos

$$C(x) = F(x)(1 - x - x^2) = (F_0 + F_1 x + \dots)(1 - x - x^2) = F_0 + (F_1 - F_0)x + \dots$$

de manera que $c_0 = F_0 = 0$ y $c_1 = (-1)F_0 + F_1 = 1$. Así entonces,

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} \quad (4.18)$$

Una vez se ha obtenido una expresión ‘cerrada’ como la ecuación

$$U(x) = \frac{C(x)}{1 - a_1 x - \dots - a_k x^k} = \frac{C(x)}{Q(x)} \quad (4.19)$$

de la función generadora $U(x)$, el paso siguiente consiste en obtener una expresión explícita de los términos de la sucesión u_n . Para ello se define lo que se llama *polinomio característico* de la ecuación de recurrencia 4.15 como el polinomio

$$P(t) = t^k - a_1 t^{k-1} - \dots - a_k = t^k Q\left(\frac{1}{t}\right)$$

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ son las raíces de este polinomio con multiplicidades m_1, \dots, m_s , la descomposición

$$P(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \dots (t - \lambda_s)^{m_s}$$

proporciona una descomposición del denominador de la expresión 4.19 de la forma $Q(x) = x^k P\left(\frac{1}{x}\right) = (1 - x\lambda_1)^{m_1} \dots (1 - x\lambda_s)^{m_s}$, de donde

$$U(x) = \frac{C(x)}{(1 - \lambda_1 x)^{m_1} \dots (1 - \lambda_s x)^{m_s}}$$

Descomponiendo esta fracción racional en fracciones simples, obtenemos una expresión del tipo

$$U(x) = \sum_{i=1}^s \left(\frac{c_{i1}}{(1-\lambda_i x)} + \cdots + \frac{c_{im_i}}{(1-\lambda_i x)^{m_i}} \right) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{m_i} \frac{c_{ij}}{(1-\lambda_i x)^j} \quad (4.20)$$

donde c_{ij} son constantes que se pueden determinar a partir de los coeficientes de $C(x)$ y de las raíces λ_i del polinomio característico².

Cada uno de los sumandos de esta expresión corresponde a una serie formal del tipo $c/(1-\lambda x)^m$. Como hemos visto en la sección anterior al tratar las combinaciones con repetición (ecuación 4.12), la expresión general de esta serie es

$$\frac{c}{(1-\lambda x)^m} = c \sum_{n \geq 0} \binom{n+m-1}{n} (\lambda x)^n$$

de manera que el coeficiente n -ésimo de la serie es $c \binom{n+m-1}{n} \lambda^n$. A partir de ésta se puede entonces obtener una expresión general del coeficiente u_n de $U(x)$ por medio de la ecuación 4.20,

$$u_n = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{m_i} c_{ij} \binom{n+j-1}{n} (\lambda_i)^n \quad (4.21)$$

Así se obtiene una expresión cerrada de la sucesión $\{u_n\}$. Observemos que las constantes que aparecen a la derecha de la igualdad son: (i) las raíces λ_i del polinomio característico (que tiene por coeficientes los de la recurrencia) y (ii) los coeficientes c_{ij} que se obtienen a partir de estas raíces y de los coeficientes del polinomio $C(x)$, determinados a partir de k valores de la sucesión. La ecuación 4.21 tiene un aspecto complicado que puede oscurecer el resultado. En realidad, lo que hemos demostrado se puede poner de forma más simple como en la proposición siguiente:

Proposición 4.9. Sea u_n una sucesión que satisface la ecuación de recurrencia lineal

$$u_n = a_1 u_{n-1} + \cdots + a_k u_{n-k} \quad n \geq k$$

y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ las raíces del polinomio característico de la ecuación,

$$P(x) = x^k - a_1 x^{k-1} - \cdots - a_k$$

con multiplicidades m_1, \dots, m_s . Entonces, existen polinomios $P_1(x), \dots, P_s(x)$, donde cada $P_i(x)$ tiene grado como mucho $m_i - 1$, de manera que

$$u_n = \sum_{i=1}^s P_i(n) \lambda_i^n \quad (4.22)$$

²El lector que no conozca estas cuestiones puede consultar, por ejemplo, [2, Cap. 5].

Además, los coeficientes de los polinomios $P_i(x)$ se pueden determinar a partir de los k primeros valores de la sucesión, u_0, u_1, \dots, u_{k-1} .

En la resolución práctica de ecuaciones de recurrencia, no es preciso disponer de una expresión explícita como la de la ecuación 4.21. El enunciado de la proposición anterior resulta suficiente y la ecuación 4.22 proporciona una manera más simple y directa de obtener los coeficientes u_n . Para ello sólo es preciso determinar los coeficientes de los s polinomios $P_i(x)$ que aparecen en esta ecuación. Esto se puede hacer poniendo en la ecuación 4.22 los valores iniciales u_0, u_1, \dots, u_{k-1} (o cualquier otro conjunto de k valores conocidos). Veremos ahora un ejemplo para encontrar una expresión cerrada de la sucesión de Fibonacci,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2, \quad F_0 = 0, \quad F_1 = 1$$

El polinomio característico de la recurrencia es $x^2 - x - 1$, que tiene las raíces

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

ambas de multiplicidad 1. De acuerdo con la proposición 4.9, el término general de la sucesión es

$$F_n = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \quad (4.23)$$

Usando los valores iniciales $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$, obtenemos

$$\left. \begin{array}{l} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 = 1 \end{array} \right\}$$

de donde $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ y $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, y

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \quad (4.24)$$

Resulta bastante curioso que la solución venga dada en términos de $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Este número es el llamado *número de oro*, que da la *proporción áurea*, considerada por los antiguos griegos como la relación perfecta entre medidas y que se usaba tanto en las construcciones arquitectónicas como en escultura. Esta proporción aparece también en ciertas manifestaciones orgánicas naturales (por ejemplo, las medidas de los huesos de los dedos humanos siguen esta proporción). Resulta curioso también que la combinación de números irracionales en la ecuación 4.24 dé siempre un número natural F_n , cosa que sería difícil de demostrar si no dispusiésemos de una definición previa de los términos de la sucesión. Estos hechos sorprendentes forman parte de la popularidad de la sucesión de Fibonacci.

4.4 Números combinatorios

En esta sección revisaremos algunos de los números combinatorios que hemos obtenido en los capítulos anteriores bajo la óptica de las funciones generadoras. Completaremos también el repertorio de números combinatorios introduciendo los números de Stirling y de Bell. Recordemos que la otra clase importante de números combinatorios, los coeficientes binomiales, ya ha sido tratada en la sección 2.

Desarreglos

En la sección 2 hemos obtenido la ecuación de recurrencia

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}), \quad n \geq 2, \quad D_0 = 1, \quad D_1 = 0 \quad (4.25)$$

para el número de desarreglos de n símbolos, D_n . De manera similar a la manera como se ha obtenido la función generadora de los coeficientes de una ecuación de recurrencia lineal, esta recurrencia conduce a una ecuación en $D(x)$.

Ejercicio 4.10. Sea $D(x)$ la función generadora (ordinaria) de la sucesión $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ del número de desarreglos de n símbolos. Multiplicando por x^n la igualdad 4.25 y sumando para $n \geq 2$, demostrar que $D(x)$ satisface la ecuación $D(x)(1-x^2) - D'(x)(x+x^3) = 1$.

Aquí, sin embargo, el uso de la función generadora exponencial

$$E(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{D_n}{n!} x^n$$

resulta más efectivo. Por ello, observemos que el número total de permutaciones de n símbolos es $n!$, y que cualquier permutación deja algún número k de elementos fijados, $k = 0, 1, \dots, n$. El número de permutaciones que dejan exactamente k símbolos fijados es $\binom{n}{k} D_{n-k}$, ya que para cada una de las $\binom{n}{k}$ elecciones de k elementos que quedan fijados podemos realizar D_{n-k} desarreglos con el resto. Así pues,

$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_{n-k} \quad (4.26)$$

El aspecto de esta ecuación recuerda la expresión de los coeficientes de un producto de funciones generadoras exponenciales: si $G(x) = e^x$ es la función generadora de la sucesión $(1, 1, \dots)$ y $E(x)$ es la función generadora exponencial de $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, la ecuación 4.26 indica que el producto $E(x)G(x) = E(x)e^x$ es la función generadora exponencial $H(x)$ de la sucesión $\{\frac{1}{n!}\}_{n \in \mathbb{N}}$. Escribiendo

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{0!}{0!} + \frac{1!}{1!}x + \frac{2!}{2!}x^2 + \dots = H(x)$$

obtenemos con sorprendente facilidad

$$E(x) = \frac{1}{1-x} e^{-x} \quad (4.27)$$

Esta expresión permite reobtener los valores de D_n tomando el coeficiente de grado n en ambos lados de la igualdad. Para obtener el coeficiente de x^n a la derecha de la igualdad es preciso hacer el producto de $(1 + x + x^2 + \dots)$ y $(1 - x + x^2/2! - x^3/3! + \dots)$, de donde

$$D_n = n! \left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right) \quad (4.28)$$

Números de Catalan

Recordemos de la sección anterior que los números de Catalan satisfacen la ecuación de recurrencia

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \dots + C_{n-2} C_1 + C_{n-1} C_0 \quad (4.29)$$

La forma de esta recurrencia recuerda la del producto de dos series formales. Llamamos

$$C(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots$$

a la función generadora de los números de Catalan. Observemos que el coeficiente u_{n-1} del producto $C(x) \cdot C(x)$ coincide, de acuerdo con la relación 4.29, con C_n , de manera que la sucesión de coeficientes de $(C(x))^2$ es la sucesión de números de Catalan trasladada una unidad. En términos de la función generadora, esto indica que tenemos la relación

$$C(x) - 1 = x(C(x))^2 \quad (4.30)$$

donde hemos restado $1 = C_0$ a la derecha de la igualdad, ya que a la izquierda no hay ‘término independiente’. Si miramos esta relación como una ecuación de segundo grado con incógnita $C(x)$,

$$x(C(x))^2 - C(x) + 1 = 0$$

y resolvemos la ecuación como resolveríamos una ecuación de segundo grado, obtenemos

$$C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x} \quad (4.31)$$

Considerada como una función de variable real, el signo ‘+’ hace que el valor de la función tienda a ∞ cuando x tiende a cero. En cambio, con la elección del signo ‘-’, este límite vale $1 = C_0 = C(0)$. Así entonces, obtenemos la expresión de la función generadora de los números de Catalan de la forma

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} \quad (4.32)$$

Particiones

En esta parte introduciremos el uso de las funciones generadoras para tener una herramienta más en el análisis de las particiones de enteros positivos y veremos también cómo permite obtener resultados de forma simple.

El tipo de funciones generadoras que dan las particiones de un entero son similares a las que dan las combinaciones con repetición. Observemos primero que el coeficiente de x^n en el desarrollo de la expresión

$$(1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2 + (x^2)^2 + \cdots) \cdots (1 + x^k + (x^k)^2 + \cdots)$$

da el número de maneras de expresar n en sumandos menores o iguales a k . En efecto, al hacer el producto se obtiene x^n cada vez que n se puede expresar como

$$n = n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \cdots + kn_k \quad (4.33)$$

Identificamos esta descomposición de n con la partición que tiene n_1 '1's, n_2 '2's, n_3 '3's, ..., n_k 'k's. Recíprocamente, cada una de estas descomposiciones proporciona una única descomposición de n como 4.33. Así pues, la función generadora $P_{\leq k}(x)$ del número $p_{\leq k}(n)$ de particiones de n en partes más pequeñas o iguales a k es

$$P_{\leq k}(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^k)} \quad (4.34)$$

Este argumento puede hacerse extensivo a otras particiones similares. Por ejemplo, las funciones generadoras del número de particiones de n en partes pares (respectivamente, impares) más pequeñas que $2k$ (respectivamente, $2k-1$) son

$$P_{p, \leq k}(x) = \frac{1}{(1-x^2)(1-(x^2)^2)\cdots(1-(x^2)^k)}$$

$$P_{s, \leq k}(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)\cdots(1-x^{2k-1})}$$

Haciendo extensivo el razonamiento sin limitar el tamaño de las partes, obtenemos la función generadora de las particiones de un entero

$$P(x) = \frac{1}{\prod_{i \geq 1} (1-x^i)}$$

la de las particiones de un entero en partes pares,

$$P_p(x) = \frac{1}{\prod_{i \geq 1} (1-(x^2)^i)}$$

y la de particiones en partes impares,

$$P_s(x) = \frac{1}{\prod_{i \geq 1} (1 - x^{2i-1})}$$

Un argumento similar, aún, proporciona el número de particiones de n en partes *diferentes*, $p_{\neq}(n)$,

$$P_{\neq}(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3) \cdots = \prod_{i \geq 1} (1+x^i) \quad (4.35)$$

Con el uso de estas funciones generadoras se pueden obtener la mayoría de los resultados que hemos visto en el capítulo anterior. Para ilustrar el tipo de argumentos que se pueden usar, demostraremos aquí el siguiente:

Proposición 4.11. El número $p_{\neq}(n)$ de particiones de n en partes diferentes coincide con el número $p_s(n)$ de particiones de n en partes impares.

Demostración. A partir de la igualdad $(1-x^{2i}) = (1-x^i)(1+x^i)$, tenemos

$$\prod_{i \geq 1} (1-x^{2i}) = \left(\prod_{i \geq 1} (1+x^i) \right) \left(\prod_{i \geq 1} (1-x^i) \right) = P_{\neq}(x) \left(\prod_{i \geq 1} (1-x^i) \right)$$

de donde

$$P_{\neq}(x) = \frac{1}{\prod_{i \geq 1} (1-x^{2i-1})} = P_s(x)$$

□

Números de Stirling y de Bell

Relacionado con el problema de las particiones de un entero positivo, otro problema clásico es el de calcular el número de particiones de un conjunto. Una *partición* de un conjunto de n elementos $X = \{1, 2, \dots, n\}$ es una descomposición de X en unión disyunta de subconjuntos. Por ejemplo, las particiones de $X = \{1, 2, 3\}$ son

$$\{1\} \{2, 3\}; \quad \{1, 2\} \{3\}; \quad \{1, 3\} \{2\}; \quad \{1\} \{2\} \{3\}; \quad \{1, 2, 3\}$$

El número de particiones de un conjunto de n elementos en k subconjuntos no vacíos se llama *número de Stirling de segundo tipo* y se denota por $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$. Por ejemplo, para cualquier n , $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = 1$ (la única partición en un solo conjunto es X mismo) y $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\} = 1$ (todos los conjuntos de la partición tienen un solo elemento). Por convenio, tomaremos el valor $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} = 0$ si $n > 0$ y $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = 0$ si $k > n$.

Ejercicio 4.12. Demostrar que, para $n > 0$, $\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2^{n-1} - 1$

Los números de Stirling tienen un cierto parentesco con los coeficientes binomiales. En particular, satisfacen una ecuación de recurrencia similar que deduciremos ahora. El conjunto P_k de particiones del conjunto $X = \{1, 2, \dots, n\}$ en k partes no vacías se puede poner como unión disyunta del conjunto P_k^1 de particiones en las cuales $\{1\}$ es una parte, y su complementario P_k^0 . Podemos establecer una biyección entre P_k^1 y el conjunto de particiones de $\{2, \dots, n\}$ en $(k-1)$ partes simplemente eliminando la parte $\{1\}$, de manera que $|P_k^1| = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}$. Por otro lado, cada partición de P_k^0 se puede obtener añadiendo el elemento 1 en una de las partes de una partición de $\{2, \dots, n\}$ en k partes (hay k posibilidades) de manera que $|P_k^0| = k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$. De aquí,

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} \quad n > k > 0 \quad (4.36)$$

Observemos la similitud con la recurrencia $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ de los coeficientes binomiales. Como en éstos, la ecuación 4.36 permite calcular los números de Stirling para valores pequeños en una estructura similar al triángulo de Tartaglia:

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 & 3 & 1 \\ & & & 0 & 1 & 7 & 6 & 1 \end{array}$$

Obtendremos ahora una expresión explícita de los números de Stirling de segundo tipo usando funciones generadoras. Como los coeficientes binomiales, estos números dependen de dos variables, n y k . En el caso de los coeficientes binomiales, hemos encontrado una función generadora para n fijado. Aquí un procedimiento similar encaja mal con la forma de la recurrencia a causa del factor k que multiplica al segundo sumando. En lugar de ello, podemos considerar la función generadora de $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ para k fijo,

$$S_k(x) = \sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^n$$

Multiplicando los dos lados de la igualdad 4.36 por x^n y sumando para $n \geq 0$ (recordemos que $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = 0$ si $n < k$), obtenemos

$$S_k(x) = xS_{k-1}(x) + kxS_k(x) \quad (4.37)$$

de manera que

$$S_k(x) = \frac{x}{(1-kx)} S_{k-1}(x)$$

Escribiendo ahora $S_{k-1}(x)$ en términos de $S_{k-2}(x)$, ésta en términos de $S_{k-3}(x)$ y reiterando el proceso hasta $S_0(x) = 1$, obtenemos

$$S_k(x) = \frac{x^k}{(1-kx)(1-(k-1)x)\cdots(1-x)} \quad (4.38)$$

Esta es una función generadora racional, de manera que podemos usar la descomposición en fracciones simples como en la sección anterior para las recurrencias lineales, y obtenemos

$$S_k(x) = x^k \sum_{j=1}^k \frac{c_j}{(1-jx)} \quad (4.39)$$

para ciertas constantes c_1, \dots, c_k . Para obtener una expresión de estas constantes, el procedimiento habitual consiste en multiplicar los dos lados de la ecuación que se obtiene de 4.38 y 4.39

$$\frac{1}{(1-kx)(1-(k-1)x)\cdots(1-x)} = \sum_{j=1}^k \frac{c_j}{(1-jx)}$$

por $(1-jx)$ y tomar $x = 1/j$, con lo que la expresión de la derecha es directamente c_j . De esta manera se obtiene (ver los detalles en el ejercicio 4.13)

$$c_j = \frac{1}{k!} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \quad (4.40)$$

Cada uno de los sumandos de la derecha de la igualdad 4.39 corresponde a la serie formal

$$\frac{c_j}{(1-jx)} = \sum_{n \geq 0} c_j j^n x^n$$

de manera que el coeficiente (n) -ésimo de la serie $S_k(x)$ es

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = c_1 + c_2 2^n + \cdots + c_k k^n$$

Substituyendo los valores de las constantes que hemos encontrado en 4.40, obtenemos finalmente una forma cerrada para los números de Stirling de segundo tipo:

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n \quad k \geq 1 \quad (4.41)$$

Ejercicio 4.13. Demostrar la fórmula de los coeficientes c_j de la expresión

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)} = \sum_{j=1}^k \frac{c_j}{(1-jx)}$$

Para ello multiplicar los dos lados de la igualdad por $(1 - jx)$ y tomar $x = 1/j$, con lo que se obtiene

$$c_j = \frac{1}{j^{k-1}}(j-1)(j-2)\cdots 2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdots (j-k)$$

Volviendo ahora al problema combinatorio asociado a los números de Stirling de segundo tipo, supongamos ahora que queremos contar el número de particiones de un conjunto de n elementos sin especificar el número de partes. Este es el llamado *número de Bell* de orden n , B_n y vale

$$B_n = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \quad (4.42)$$

Está claro que la fórmula 4.41, que proporciona los números de Stirling $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$, puede servir para calcular los números de Bell. Los primeros de estos números, con el convenio que $B_0 = 1$, son

$$1, 1, 2, 5, 15, 52, \dots$$

Hay otra manera de obtener los números de Bell. En primer lugar obtendremos una ecuación de recurrencia para B_{n+1} . Dado el conjunto $X = \{1, 2, \dots, n, n+1\}$, consideremos el elemento 1. En cada partición de X , el elemento 1 está en una parte de $(k+1)$ elementos para una cierta $k = 0, 1, \dots, n$. Hay $\binom{n}{k}$ maneras de escoger los otros elementos de esta parte, y hay B_{n-k} particiones de los $(n-k)$ elementos que quedan. Así entonces,

$$B_{n+1} = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} B_{n-k} \quad (4.43)$$

La forma de esta ecuación de recurrencia sugiere el producto de funciones generadoras exponenciales de la proposición 4.7. Intentemos entonces obtener esta función generadora,

$$E(x) = \sum_{n \geq 0} B_n \frac{x^n}{n!}$$

Para ello, multiplicamos los dos lados de la ecuación 4.43 por $x^n/n!$ y sumamos para $n \geq 0$:

$$\sum_{n \geq 0} B_{n+1} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} B_{n-k} \frac{x^n}{n!} \quad (4.44)$$

En la parte izquierda de la igualdad tenemos la función generadora exponencial de la secuencia $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ pero trasladada una unidad. En el caso de las funciones generadoras ordinarias, esta traslación se traduce en multiplicar por x . En el caso de las funciones generadoras exponenciales corresponde en cambio a la operación de derivación.

Ejercicio 4.14. Si $E(x) = \sum_{n \geq 0} u_n \frac{x^n}{n!}$ es la función generadora exponencial de la sucesión (u_0, u_1, u_2, \dots) , demostrar que la función generadora exponencial de la sucesión $(0, u_0, u_1, \dots)$ es $E'(x)$.

En cuanto al lado de la derecha, el coeficiente de $\frac{x^n}{n!}$ es

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} B_{n-k}$$

que corresponde al coeficiente n -ésimo de la función generadora exponencial del producto de $E(x)$ y $G(x) = e^x$, siendo esta última la función generadora exponencial de la sucesión $(1, 1, 1, \dots)$. Con todo esto,

$$E'(x) = E(x)e^x \quad (4.45)$$

de donde $E'(x)/E(x) = e^x - 1$ y

$$E(x) = e^{e^x - 1} \quad (4.46)$$

Esta última expresión es una ilustración más de la versatilidad y la potencia del uso de las funciones generadoras para la resolución de problemas de enumeración.

Hemos estado hablando de los números de Stirling de segundo tipo. Esto, está claro, es porque hay una clase de números que se llaman números de Stirling de *primer tipo*. Acabaremos este capítulo introduciéndolos. En este caso, la función generadora servirá de instrumento para definir esta clase de números.

Recordemos que en el capítulo 2 hemos considerado la extensión de los coeficientes binomiales $\binom{m}{n}$ al caso en que m es un número real x cualquiera, tomando

$$\binom{x}{n} = \frac{1}{n!} x(x-1) \cdots (x-n+1)$$

Al desarrollar la expresión $x(x-1) \cdots (x-n+1)$, se obtiene una serie formal con los coeficientes de grado más grande n nulos,

$$x(x-1) \cdots (x-n+1) = \sum_{k=1}^n a_k x^k \quad (4.47)$$

Los coeficientes de esta serie son los llamados *números de Stirling de primer tipo* y se denotan por $s(n, k)$. Por convenio, $s(0, 0) = 0$. Además, $s(n, k) = 0$ para $k \geq n$. Para valores pequeños de n , se puede obtener fácilmente una lista de los valores de $s(n, k)$:

$$\begin{array}{lll} n = 1 & x & s(1, 1) = 1 \\ n = 2 & x(x-1) = x^2 - x & s(2, 1) = -1, s(2, 2) = 1 \\ n = 3 & x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x & s(3, 1) = 2, s(3, 2) = -3, s(3, 3) = 1 \end{array}$$

En particular, la función generadora $s_n(x)$ de los números de Stirling $s(n, k)$ para n fijo es

$$s_n(x) = x(x-1)\cdots(x-(n-1))$$

Algunas veces se hace referencia a los números de Stirling de primer tipo como los valores absolutos de los coeficientes que aparecen en el desarrollo 4.47. La notación

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = (-1)^{(n-k)} s(n, k) \quad (4.48)$$

está bastante extendida y la adoptaremos aquí.

El motivo por el cual estos números tienen una denominación tan próxima a los números de Stirling de segundo tipo es que estos últimos satisfacen una relación en cierta manera dual a la de los primeros. Así como podemos escribir

$$x(x-1)\cdots(x-n+1) = \sum_{k \geq 0} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] (-1)^{(n-k)} x^k$$

también podemos escribir

$$x^n = \sum_{k \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x(x-1)\cdots(x-k+1)$$

Ejercicio 4.15. Demostrar la identidad anterior usando la relación de recurrencia de los números de Stirling de segundo tipo.

Con estas relaciones se obtienen una buena cantidad de identidades combinatorias que relacionan coeficientes binomiales y números de Stirling, algunas de las cuales se consideran en los ejercicios al final del capítulo. En los ejercicios del capítulo 10 se dará también una interpretación combinatoria de los números de Stirling de primer tipo. Aquí acabaremos la sección obteniendo una relación de recurrencia para estos números que vuelve a tener similitud con las de los coeficientes binomiales y de los números de Stirling de segundo tipo que hemos considerado en esta sección.

Proposición 4.16. Los números $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$ satisfacen la ecuación de recurrencia

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = (n-1) \left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right] \quad (4.49)$$

Demostración. Escribimos la función generadora $s_n(x)$ de los números $s(n, k) = (-1)^{(n-k)} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$ como

$$\begin{aligned} x(x-1)\cdots(x-n+2)(x-n+1) = \\ x(x-1)\cdots(x-n+2)x - x(x-1)\cdots(x-n+2)(n-1) \end{aligned}$$

de manera que

$$s_n(x) = xs_{n-1}(x) - (n-1)s_n(x)$$

Igualando ahora los coeficientes de mismo grado, obtenemos

$$s(n, k) = s(n-1, k-1) - (n-1)s(n-1, k)$$

que escrito en la notación $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ proporciona la identidad de la proposición. \square

La ecuación de recurrencia 4.49 permite construir el triángulo de los números de Stirling de primer tipo de forma similar a como se ha hecho para los coeficientes binomiales y para los números de Stirling de segundo tipo,

$$\begin{array}{cccc} & & 0 & 1 \\ & & 0 & 1 & 1 \\ & & 0 & 2 & 3 & 1 \\ & & 0 & 6 & 11 & 6 & 1 \end{array}$$

Notas bibliográficas

Quizá la primera referencia a una ecuación de recurrencia es el *Liber Abaci* (1203) de Leonardo da Pisa (conocido también como Fibonacci), donde se trata el problema de crecimiento de una población que da lugar a la sucesión de Fibonacci. Fue el matemático francés del siglo XIX, F. E. A. Lucas, quien dio el nombre a la sucesión.

Las funciones generadoras surgen inicialmente como una rama del análisis que se llamó análisis combinatorio, aunque la manipulación de series ya había sido un recurso muy utilizado por matemáticos como Newton, Euler, Gauss o Lagrange. Uno de los textos que intentan sistematizar el análisis combinatorio es el libro clásico de MacMahon (1917) [3]. Por otra parte, en el libro de H. S. Wilf [4] se puede encontrar un texto moderno y sugerente sobre el tema.

Los números combinatorios que se han tratado en este capítulo no agotan la familia de números combinatorios útiles para problemas de enumeración. En el libro de Graham, Knuth y Patashnik [1] hay un extenso capítulo dedicado a los números combinatorios.

Bibliografía

- [1] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik. *Concrete Mathematics*, Addison Wesley, 1991.
- [2] H. Childs. *A Concrete Introduction to Higher Algebra*, UTM, Springer Verlag, 1979.

[3] P. A. MacMahon. *Combinatory Analysis*, Chelsea Publishing Company, NY, 1960.

[4] H. S. Wilf. *Generatingfunctionology*, Academic Press, 1990.

Problemas

1. Sea A_n el número de maneras de subir n escalones en n pasos si en cada paso podemos subir uno o dos escalones indistintamente. Demostrar que la función generadora de la sucesión $\{A_n\}$ es $A(x) = 1/(1 - x - x^2)$.
2. Una triangulación de un polígono regular es una partición del polígono en triángulos. Encontrar una ecuación de recurrencia para el número T_n de triangulaciones de un polígono regular de n lados. *Indicación: los números T_n satisfacen una ecuación de recurrencia similar a la de los números de Catalan.*
3. Llamar $f(n)$ al número de regiones en que el plano queda dividido por n rectas (por ejemplo, $f(1) = 2$ y $f(2) = 4$; suponer que no hay dos rectas paralelas ni que tres cualesquiera se puedan cortar en un único punto). Demostrar que $f(n) = 1 + n(n + 1)/2$.
4. Encontrar una ecuación de recurrencia que dé el número $f(n)$ de palabras de longitud n de palabras de un alfabeto $\{A, B, C\}$, de manera que los símbolos A y B no aparezcan consecutivamente. Demostrar que la función generadora de la secuencia $f(n)$ es $(1 + x)/(1 - 2x - x^2)$ y deducir que $f(n) = (1/2)((1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n)$.
5. Encontrar la función generadora del número $f(k)$ de palabras de longitud k del alfabeto $\{0, 1, -1, 2, -2\}$ en las cuales hay un número par de ceros.
6. Sea $E(x)$ la función generadora exponencial de la sucesión (u_0, u_1, \dots) . Demostrar que la función generadora exponencial de la sucesión $(0, u_0, u_1, \dots)$ es $E'(x)$ y que, en general, la derivada k -ésima de $E(x)$ es la función generadora exponencial de la sucesión $(\underbrace{0, \dots, 0}_k, u_0, u_1, \dots)$.

Usar el resultado anterior para demostrar que la función generadora exponencial de la sucesión de Fibonacci F_n es $E(x) = (1/\sqrt{5})(\lambda_1 e^{\lambda_1 x} - \lambda_2 e^{\lambda_2 x})$, donde λ_1, λ_2 son las raíces positiva y negativa respectivamente de $P(x) = x^2 - x - 1$.

7. Usando las expresiones $F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$ y $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$, donde F_n es el n -ésimo número de Fibonacci, demostrar las identidades

$$(a) F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n$$

$$(b) F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$$

$$(c) F_{2n} = F_n F_{n+1} + F_{n-1} F_n$$

Deducir en particular que F_{kn} es un múltiplo de F_n .

8. Demostrar que cualquier número natural n se puede expresar de manera única como $n = F_{k_1} + F_{k_2} + \dots + F_{k_r}$, donde $k_i \geq k_{i+1} + 2$, $i = 1, \dots, r-1$ (escoger F_{k_1} como el número más grande de Fibonacci entre los menores que n y demostrar el enunciado por inducción).
9. En la transmisión de mensajes formados por palabras de ceros y unos, cada '0' se transmite en una unidad de tiempo y cada '1' en dos unidades de tiempo. Determinar el número $N(k)$ de mensajes que se pueden transmitir en k unidades de tiempo.
10. Determinar el número $h(n)$ de movimientos que es preciso hacer para resolver el problema de las torres de Hanoi del capítulo 1, sabiendo que $h(n) = 2h(n-1) + 1$, $n \geq 2$.
11. Encontrar la función generadora de la sucesión $\{2^n + 3^n\} = \{2, 5, 13, \dots\}$.
12. Encontrar la expresión del término general de la recurrencia lineal homogénea

$$u_n = 5u_{n-1} + 6u_{n-2}, \quad u_0 = 0, \quad u_1 = 1$$

13. Usando la notación $[x]_n = x(x-1) \cdots (x-n+1)$, demostrar que

$$[x+y]_n = \sum_{k \geq 0} [x]_k [y]_{n-k}$$

14. Demostrar que $\left\{ \binom{n}{n-1} \right\} = \left[\begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right] = \binom{n}{2}$