

**POLITEXT 99**

# **Matemática discreta**

POLITEXT

Francesc Comellas - Josep Fàbrega  
Anna Sànchez - Oriol Serra

# Matemática discreta

EDICIONS UPC

La presente obra fue galardonada en el segundo concurso  
"Ajuts a l'elaboració de material docent" convocado por la UPC.

Traducción al castellano de la obra original en catalán  
*Matemàtica discreta*, realizada por Gabriel Valiente.

Primera edición: febrero de 2001

Diseño de la cubierta: Manuel Andreu

- © Los autores, 2001
- © Gabriel Valiente, para la traducción, 2001
- © Edicions UPC, 2001  
Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, SL  
Jordi Girona Salgado 31, 08034 Barcelona  
Tel.: 934 016 883 Fax: 934 015 885  
Edicions Virtuals: [www.edicionsupc.es](http://www.edicionsupc.es)  
E-mail: [edicions-upc@upc.es](mailto:edicions-upc@upc.es)

Producción: Grup Artyplan-Artimpres S. A.  
Agricultura 21, Nave 5, 08980 Sant Feliu de Ll. (Barcelona)

Depósito legal: B-7.069-2001  
ISBN: 84-8301-456-4

Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita de los titulares del copyright, bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos.

# Índice General

<b>Prólogo</b>	<b>iv</b>
<b>1 Algoritmos</b>	<b>1</b>
1.1 Introducción . . . . .	1
1.2 Algoritmos y máquina de Turing . . . . .	4
1.3 Lenguaje algorítmico . . . . .	7
1.4 Análisis de algoritmos . . . . .	9
1.5 Comparación de algoritmos . . . . .	15
1.6 Clasificación de algoritmos . . . . .	20
<b>Enumeración</b>	<b>25</b>
<b>2 Combinaciones y permutaciones</b>	<b>27</b>
2.1 Selecciones ordenadas y no ordenadas . . . . .	27
2.2 Algunos ejemplos de aplicación . . . . .	32
2.3 Propiedades de los coeficientes binomiales . . . . .	38
<b>3 Principios básicos de enumeración</b>	<b>49</b>
3.1 Cardinales de conjuntos . . . . .	50
3.2 Principio de inclusión-exclusión . . . . .	51
3.3 Biyecciones. Números de Catalan. Particiones . . . . .	58
3.4 El principio del palomar y el teorema de Ramsey . . . . .	64
<b>4 Funciones generadoras</b>	<b>73</b>
4.1 Ecuaciones de recurrencia . . . . .	74
4.2 Funciones generadoras . . . . .	78
4.3 Ecuaciones de recurrencia lineales . . . . .	84
4.4 Números combinatorios . . . . .	89

<b>Teoría de grafos</b>	<b>101</b>
<b>5 Grafos y digrafos</b>	<b>103</b>
5.1 Definiciones básicas . . . . .	103
5.2 Caminos, conectividad y distancia . . . . .	106
5.3 Operaciones entre grafos . . . . .	108
5.4 Digrafos . . . . .	110
5.5 Representación matricial . . . . .	111
5.6 Grafos y redes de interconexión . . . . .	114
5.7 Planaridad: la fórmula de Euler . . . . .	115
5.8 Caracterización de los grafos planares . . . . .	117
<b>6 Árboles</b>	<b>123</b>
6.1 Árboles . . . . .	124
6.2 Árboles generadores . . . . .	127
6.3 Número de árboles generadores . . . . .	128
6.4 Obtención de todos los árboles generadores . . . . .	132
6.5 Árboles generadores de coste mínimo . . . . .	133
<b>7 Circuitos y ciclos</b>	<b>141</b>
7.1 Grafos eulerianos . . . . .	141
7.2 Ciclos hamiltonianos . . . . .	149
7.3 Ciclos fundamentales . . . . .	156
7.4 Análisis de redes eléctricas . . . . .	162
<b>8 Flujos, conectividad y apareamientos</b>	<b>173</b>
8.1 Redes de transporte . . . . .	174
8.2 El teorema del flujo máximo–corte mínimo . . . . .	177
8.3 Conectividad . . . . .	180
8.4 Los teoremas de Menger . . . . .	181
8.5 Apareamientos en grafos bipartitos . . . . .	184
8.6 El teorema de Hall . . . . .	185
<b>Estructuras algebraicas</b>	<b>191</b>
<b>9 Introducción a las estructuras algebraicas</b>	<b>193</b>
9.1 Relaciones . . . . .	193
9.2 Aplicaciones . . . . .	199

---

9.3 Operaciones . . . . .	203
9.4 Estructuras algebraicas . . . . .	208
<b>10 Grupos</b>	<b>215</b>
10.1 Definiciones y propiedades . . . . .	216
10.2 Grupos abelianos finitos . . . . .	224
10.3 Grupos de permutaciones . . . . .	229
10.4 Digrafos de Cayley . . . . .	240
10.5 Enumeración de Pólya . . . . .	244
<b>11 Anillos y cuerpos</b>	<b>257</b>
11.1 Definiciones y propiedades . . . . .	257
11.2 El anillo de los polinomios . . . . .	266
11.3 Cuerpos finitos . . . . .	275
<b>12 Estructuras combinatorias</b>	<b>289</b>
12.1 Diseños combinatorios . . . . .	289
12.2 Geometrías finitas . . . . .	305
12.3 Cuadrados latinos . . . . .	314
<b>Índice de materias</b>	<b>331</b>

# Prólogo

La *matemática discreta* es una rama de las matemáticas que trata las estructuras finitas y numerables. Esta definición, forzosamente imprecisa, queda mejor delimitada cuando se da una descripción de sus contenidos. A grandes rasgos, las líneas básicas de las que se ocupa la matemática discreta son las técnicas de enumeración, las estructuras combinatorias, la teoría de grafos y las estructuras algebraicas. Asimismo, la algorítmica es una herramienta imprescindible para la construcción de soluciones a los problemas que se tratan.

Aunque históricamente éstas eran áreas que no formaban un cuerpo estructurado, el progreso de la informática y de las técnicas de computación les ha dado un impulso decisivo y las ha convertido en una de las ramas de la matemática aplicada con más vitalidad.

Este impulso ha influido también en el diseño de los *curricula* en las enseñanzas de ingeniería y matemáticas alrededor del mundo. En este sentido, en nuestro país, la implantación de nuevos planes de estudio y la reforma de los existentes hace que la matemática discreta haya sido introducida como un elemento importante de la formación básica.

El libro de texto que se propone ha sido pensado para servir de soporte a cursos básicos de matemática discreta. Así, los conocimientos de matemáticas que se presuponen en el lector son los que corresponden a unos primeros cursos universitarios de álgebra y cálculo. El texto contiene material más que suficiente para cubrir dos cuatrimestres lectivos, y facilita así una cierta flexibilidad en la elección de los temas a explicar. Desde el punto de vista pedagógico se ha hecho un esfuerzo especial para presentar los temas de una forma simple pero rigurosa. Como cualquier texto de matemáticas, los problemas al final de los capítulos y los ejercicios insertados en el texto constituyen un elemento importante del libro.

El contenido del libro se estructura en un capítulo inicial sobre algorítmica seguido de tres partes dedicadas a la enumeración, la teoría de grafos y las estructuras algebraicas discretas.

En el capítulo inicial se introducen las nociones básicas de recursividad, lenguajes algorítmicos y complejidad de algoritmos. En la primera parte, se hace un repaso de la combinatoria elemental, se discuten principios básicos de enumeración y se presentan técnicas de enumeración más elaboradas basadas en las funciones generadoras y las ecuaciones de recurrencia. Paralelamente, se van introduciendo también algunos temas clásicos de combinatoria como,

por ejemplo, las particiones de conjuntos y de enteros, desarreglos o la teoría de Ramsey, entre otros.

La segunda parte presenta los temas básicos de la teoría de grafos. Se introducen en primer lugar los elementos básicos de la teoría y la terminología. A continuación se estudian los árboles, en cierto sentido la clase más simple de grafos, a pesar de tener numerosas aplicaciones en áreas muy diversas. En particular, se trata también la obtención de árboles generadores de coste mínimo, que constituye un problema clásico en investigación operativa. Sigue el estudio de la estructura cíclica de un grafo y su aplicación al análisis de redes eléctricas. También se tratan los problemas clásicos de existencia de circuitos eulerianos y ciclos hamiltonianos, y su relación con ciertos problemas de optimización combinatoria como pueden ser los problemas del viajante o del cartero chino. El último capítulo de esta parte estudia tres temas aparentemente no relacionados, pero que resultan estar estrechamente ligados: flujos en redes de transporte, conectividad de grafos y apareamientos en grafos bipartitos. Todos ellos tienen numerosas aplicaciones a problemas de optimización y de asignación y en el diseño de redes de interconexión.

Finalmente, la última parte del libro está dedicada a estudiar las estructuras algebraicas discretas. Después de introducir las operaciones binarias y sus propiedades, se presentan los conceptos básicos de la teoría de grupos. Se describen las propiedades más significativas de los grupos cíclicos y de los grupos de permutaciones, y se dedica una atención especial a la representación de grupos por medio de los grafos de Cayley. A continuación se tratan estructuras algebraicas definidas a partir de dos operaciones: anillos y cuerpos. En particular, se estudia el anillo de polinomios y se aplica a la construcción de cuerpos finitos. Las estructuras combinatorias estudian de manera sistemática las relaciones de incidencia entre determinados objetos y ciertos subconjuntos de estos objetos. En el último capítulo se introducen los diseños combinatorios como modelos generales de estas estructuras. En particular, se introducen las llamadas *geometrías finitas* y se particulariza en el estudio de planes afines y proyectivos finitos. El capítulo se acaba con el estudio de cuadrados latinos y la construcción de conjuntos de cuadrados latinos mutuamente ortogonales.

Los autores quieren agradecer especialmente el interés con que el profesor José Luis Andrés Yebra ha revisado el manuscrito de este libro. Sus correcciones y sugerencias han sido una ayuda muy valiosa. En este sentido, queremos manifestar también nuestro agradecimiento al profesor Miquel Àngel Fiol Mora, así como a Javier Ozón Górriz.

Agradecemos también el soporte institucional de la Universitat Politècnica de Catalunya y la confianza depositada en el proyecto de este libro que se ha manifestado en el otorgamiento de una ayuda para su elaboración.

Los autores

Barcelona, 23 de marzo de 1994

# Índice de Materias

- 1-factor, 190
- adyacente
  - desde, 110
  - hacia, 110
- Albertson, algoritmo de, 153
- algoritmo, 2, 5
  - de burbujas, 17
  - de inserción, 16
  - de inserción mínima, 154
  - genético, 156
  - recursivo, 9
- anillo, 210, 257
  - íntegro, 259
  - abeliano, 258
  - centro, 285
  - cociente, 262
  - de Boole, 284
  - euclídeo, 270
  - principal, 263
  - producto cartesiano, 285
  - unitario, 258
- anulador por la izquierda, 285
- apareamiento, 184
  - completo, 185
  - perfecto, 184
- aplicación, 199
  - biyectiva, 201
  - exhaustiva, 201
  - inyectiva, 201
- árbol, 124
  - binario, 124
  - de decisión, 124
  - generador, 127
  - generador de coste mínimo, 133
- arborescencia, 139
- arco, 110
- arista, 103
- arista-conectividad, 180
- aristas
  - independientes, 103, 184
  - paralelas, 104
- automorfismo, 213
  - de un grafo, 120
- autovalores de un grafo, 121
- Bézout, identidad de, 271
- BIBD, 298
- Binet–Cauchy, teorema de, 130
- biyecciones, 58
- bloque, 189, 289
  - de un grafo, 189
- Bose, teorema de, 318
- bosque, 126
- Bruch–Ryser–Chowla, teorema de, 304
- Burnside, lema de, 246
- camino, 106
  - hamiltoniano, 150
- caminos
  - internamente disyuntos, 181

- capacidad, 174
- característica, 259
- cardinales de conjuntos, 50
- Cauchy, teorema de, 229
- Cayley, fórmula de, 131
- Cayley, teorema de, 235
- centro, 107, 285
- Church–Turing, hipótesis de, 6
- ciclo, 106
  - fundamental, 158, 161
  - hamiltoniano, 150
- circuito, 106
  - euleriano, 142
  - euleriano dirigido, 147
- clase de equivalencia, 197
- clases laterales, 219
- cociclo, 160
  - fundamental, 160
- coeficiente, 266
- coeficientes binomiales, 31, 38, 75, 80
  - propiedad de la adición, 39
- coeficientes multinomiales, 43
- combinaciones, 27
  - con repetición, 28
  - sin repetición, 28
- complejidad
  - espacial, 10
  - temporal, 10
- complemento de un grafo, 109
- componentes, 107
- composición de aplicaciones, 202
- conectividad, 180
- conexo
  - débilmente, 111
  - fuertemente, 111
  - unilateralmente, 111
- congruencia módulo  $n$ , 197
- conjunto
  - cociente, 199
  - separador, 181
- contracción, 296
  - de una arista, 131
- correspondencia, 194
- corrientes de ciclo, 164
- corte
  - $s$ – $t$  corte, 175
  - mínimo, 177
  - simple, 160
- coste, 133
- cuadrados latinos, 314
  - ortogonales, 316
- cuerda, 127
- cuerpo, 210, 260
- de Bruijn
  - digrafo de, 148
  - secuencia de, 148
- defecto de un grafo bipartito, 185
- desarreglos, 56, 75, 89
- descomposición de un grafo en subgrafos, 146
- diámetro, 107
- diferencia simétrica, 284
- digrafo, 110
  - de Cayley, 242
  - hamiltoniano, 152
  - línea, 122
  - simétrico, 111
  - simétrico asociado a un grafo, 111
- Dirac, teorema de, 152
- Dirichlet, principio de, 64
- diseño, 289
  - complementario, 292
  - derivado, 303
  - dual, 291

- incompleto, 292
- isomorfo, 290
- regular, 292
- residual, 303
- $s$ -derivado, 296
- $s$ -residual, 297
- simétrico, 301
- simple, 290
- uniforme, 292
- distancia, 106
  - media, 107
- divisores de cero, 258
- dominio, 200
  
- ecuaciones de recurrencia, 74
  - lineales, 84
- elemento
  - inverso, 207
  - neutro, 207
  - primitivo, 281
- endomorfismo, 213
- epimorfismo, 212
  - de anillos, 264
- equilibrado, 298
- Eratóstenes, 53
- Erdős–Szekeres, teorema de, 65
- espacio, 9
- estabilizador, 245
- estructura
  - algebraica, 208
  - cociente, 213
- Euclides
  - algoritmo de, 4, 12, 271
  - teorema de, 270
- Euler
  - fórmula de, 116
  - función  $\phi$  de, 55
- excentricidad, 107
  
- fórmula del binomio, 35, 80
- fórmula multinomial, 35
- factorial, 29
- Ferrers, diagramas de, 62
- Fleury, algoritmo de, 168
- flujo, 174
  - máximo, 177
  - neto entrante, 174
  - neto saliente, 174
  - valor del, 175
- Ford–Fulkerson
  - algoritmo de, 179
  - teorema de, 177
- función polinómica, 274
- funciones generadoras, 78
  - exponenciales, 83
  - ordinarias, 78
  
- geometría lineal finita, 305
- giro, 121
- grado, 105, 266
  - de entrada, 110
  - de salida, 110
  - máximo, 105
  - mínimo, 105
  - secuencia de grados, 120
- grafo, 103
  - $d$ -regular, 105
  - $k$ -arista conexo, 180
  - $k$ -conexo, 180
  - $r$ -partito, 109
  - bipartito, 109
  - bipartito completo, 109
  - camino, 108
  - ciclo, 108
  - completo, 108
  - conexo, 106
  - de Cayley, 242

- dirigido, 110
- euleriano, 142
- hamiltoniano, 150
- hipohamiltoniano, 169
- nulo, 109
- planar, 115
- subyacente, 111
- trivial, 107
- vértice-simétrico, 121
- vértice-transitivo, 121
- grupo, 209, 216
  - alternado, 238
  - cíclico, 224, 225
  - cociente, 220
  - de los cuaternones, 242
  - de permutaciones, 230
  - diédrico, 231
  - isomorfo, 221
  - presentación, 240
  - producto cartesiano, 222
  - relaciones, 241
  - simétrico, 230
- Hall, teorema de, 186
- hipercubo, 110, 253
- homomorfismo, 263
  - canónico, 264
  - de grupos, 221
- ideal, 261
  - bilateral, 261
  - maximal, 265
  - principal, 262
- índice de ciclos, 248
- intersección de grafos, 109
- invariante de un grafo, 105
- isomorfismo, 212
  - de anillos, 264
- de grafos, 105
- Königsberg, problema de los puentes de, 141
- Kirchoff, leyes de, 163
- Kuratowski, teorema de, 119
- Lagrange, teorema de, 220
- lazos, 104
- lista de incidencia, 114
- máquina de Turing, 4
  - determinista, 5
  - no determinista, 21
- matriz
  - de adyacencia, 112
  - de ciclos fundamentales, 159
  - de grados, 139
  - de impedancias, 164
  - de impedancias de ciclo, 165
  - de incidencia, 113, 290
  - de incidencia reducida, 128
- Menger, teorema de, 182, 183
- mergesort, 17
- Meyniel, teorema de, 153
- MOLS, 317
- monoide, 209
- monomorfismo, 212
  - de anillos, 264
- morfismo, 212
  - de anillos, 263
- MTND, 21
- multigrafo, 104
  - euleriano, 142
- mutación, 156
- número ciclomático, 158
- números
  - combinatorios, 89

- de Bell, 92, 95
- de Catalan, 58, 59, 76, 90
- de Fibonacci, 77
- de Ramsey, 67
- de Stirling, 92
  - de primer tipo, 96, 253
  - de segundo tipo, 92
- piramidales, 42
- triangulares, 41
- NP-C, 21
  
- operación binaria, 203
  - asociativa, 206
  - conmutativa, 206
  - distributiva, 206
- órbita, 245
- orden, 103, 225, 304, 309
- Ore, teorema de, 151
  
- palabras de alfabetos, 32
- particiones, 58, 77, 91
  - conjugadas, 62
  - de conjuntos, 92
  - de un entero, 61
- Pascal, triángulo de, 39
- permutación
  - ciclo, 233
  - signatura, 238
  - transposición, 235
- permutaciones, 27
  - con repetición, 28
  - sin repetición, 28
- Petersen, grafo de, 120
- plano
  - afín, 312
  - proyectivo, 306
- población, 156
- polinomio, 266
  - característico, 86
  - divisor, 268
  - irreducible, 269
  - mónico, 266
  - mcd, 269
  - mcm, 270
  - primo, 268, 269
  - producto, 266
  - suma, 266
- polinomios coprimos, 270
- Prüfer, secuencia de, 138
- principio
  - de adición, 50
  - de dualidad, 307
  - de inclusión-exclusión, 51
    - criba, 69
  - del palomar, 64
- problema
  - $(\Delta, D)$ , 115
  - de los matrimonios, 186
  - del cartero chino, 168
  - del conector, 133
  - del viajante, 154
  - tipo NP, 21
  - tipo P, 20
- procedimiento, 9
- producto cartesiano, 193
  - de grafos, 109
- producto directo, 223
- proporción áurea, 88
- puente, 108
  
- quicksort, 19
  
- raíz, 274
  - multiplicidad, 275
- radio, 107
- Ramsey, teorema de, 64

- recorrido, 106, 200
  - euleriano, 142
- recursividad, 9
- red
  - de interconexión, 115
  - de transporte, 174
- región, 116
- relació
  - de equivalencia, 197
- relación, 194
  - binaria, 194
  - de orden, 196
  - inversa, 200
  
- secuencia de aumento, 177
- semigrupo, 209
- series formales, 78
- simulated annealing*, 156
- sistema de representantes diferentes, 187
- Steiner, sistema de, 298
- subanillo, 260
- subdivisión
  - de un grafo, 118
  - de una arista, 118
- subespacio
  - de ciclos, 158
  - de cociclos, 160
- subestructura, 211
- subgrafo, 104
  - generador, 104
  - inducido, 104
- subgrupo, 218
  - índice, 219
  - generado, 225
  - normal, 220
  - propio, 219
  - trivial, 219
- suma binaria de grafos, 110
  
- suma de grafos, 109
- t*-diseño, 294
- tamaño, 103
- teoría de grafos, 101
- teorema
  - de factorización, 269
  - del flujo máximo–corte mínimo, 177
- tiempo, 9
- torneo, 153
- torres de Hanoi, 13
- transformación elemental, 132
- transversal, 187
- Tutte, teorema de, 152
  
- unión de grafos, 109
  
- vértice, 103
  - de corte, 107
- vértices
  - adyacentes, 103
  - apareados, 184
  - independientes, 103
- vértices y aristas incidentes, 103
- variedades, 289
- vectores ortogonales, en grafos, 158
  
- Whitney, teorema de, 184